

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

13. Band, Heft 5 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 193—240

Geschichtliches.

Sarton, George: *Minoan mathematics.* Isis 24, 375—381 (1936).

Bericht über die kretischen Zahlzeichen. O. Neugebauer (Kopenhagen).

Baudoux, Claire: *La version syriaque des „éléments“ d'Euclide.* (Bruxelles, 19. à 23. VI. 1935.) C. R. 2. Congr. Nat. Sci. 73—75 (1935).

Kugener, M.-A.: *Les versions latines des „éléments“ d'Euclide conservées à la bibliothèque publique de Bruges.* (Bruxelles, 19.—23. VI. 1935.) C. R. 2. Congr. Nat. Sci. 70—72 (1935).

Gandz, S.: *The Sources of al-Khowārizmī's Algebra.* Osiris 1, 263—277 (1936).

Verf. hebt die Gegensätze zwischen den Werken von al-Kh. und Euklid wie Diophant hervor und betont dagegen ihren Zusammenhang mit der orientalischen Mathematik. O. Neugebauer (Kopenhagen).

Loria, Gino: *Eulero o i neo-pitagorici?* (Una questione di priorità.) Studi in onore Salvatore Ortu Carboni 233—238 (1935).

Es wird darauf hingewiesen, daß sich bei Theon Sm. die Betrachtung gewisser rekurrent definierter Zahlenfolgen findet („Seiten-“ und „Diagonalzahlen“), die zu den Eulerschen Lösungen von $x^2 = \frac{1}{2}y(y+1)$ (Bestimmung der „Dreieckszahlen“, die gleichzeitig Quadrate sind) in ganz enger Beziehung stehen. O. Neugebauer.

Stamm, E.: *„Tractatus de Continuo“ von Thomas Bradwardina, eine Handschrift aus dem XIV. Jahrhundert.* C. R. Soc. Sci. Varsovie 28, 26—43 (1936) [Polnisch].

Vor einigen Jahrzehnten hat M. Curtze auf eine Handschrift (R 4^o 2) der Thorner Bibl. aufmerksam gemacht, in welcher neben anderen Werken auch der „Tractatus de Continuo“ von Bradwardina (ca. 1290—1349) sich fand. Die Handschrift stammt wahrscheinlich v. J. 1359. Ein anderes anonymes Exemplar des Traktats (zweite Hälfte d. XIV. Jh.) befindet sich in Erfurt (CA 4^o 385). Auf Grund beider Handschriften stellte ich den Text zusammen, welcher in kurzer Zeit veröffentlicht werden wird. Der Traktat bildet einen wichtigen Beitrag zum Continuumproblem im Mittelalter und weist sogar manche Berührungspunkte mit modernen Untersuchungen über das Continuum auf (Drobisch, Brouwer). *Auszug.*

Smith, David Eugene: *Changes in elementary mathematical terms in the last three centuries.* Scripta Math. 3, 291—300 (1935).

Zusammenstellung der Angaben über eine Reihe von Termini aus den enzyklopädischen Werken von Alsted, Mersenne, Vitalis und Ozanam, um daran den Wandel der Terminologie zu illustrieren. O. Neugebauer (Kopenhagen).

Linder, A.: *Daniel Bernoulli and J. H. Lambert on mortality statistics.* J. Roy. Statist. Soc., N. s. 99, 138—141 (1936).

Spiess, O.: *Die wissenschaftliche Korrespondenz der Mathematiker Bernoulli.* (116. Jahresvers., Einsiedeln, Sitzg. v. 17.—20. VIII. 1935.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 278—279 (1935).

● **Krawtchouk, M.:** *Eulers Einfluß auf die spätere Entwicklung der Mathematik.* Kiev. Verl. d. Allukrain. Akad. d. Wiss. 1935. 46 S. [Ukrainisch].

Hamel, Georg: *Joseph Louis Lagrange. Zur Zweihundertjahrfeier seines Geburtstages.* Naturwiss. 24, 51—53 (1936).

Ducassé, P.: *La pensée mathématique d'Auguste Comte.* Thalès. Rec. Ann. Trav. Inst. Hist. Sci. et Techn., Univ. Paris 1, 133—143 (1935).

Godeaux, Lucien: Un précurseur belge de la géométrie projective: Jacques-François le poivre. (*Bruxelles, 19.—23. VI. 1935.*) C. R. 2. Congr. Nat. Sci. 94—95 (1935).

Libois, P.: De l'espace métrique à l'espace projectif. (*Bruxelles, 19.—23. VI. 1935.*) C. R. 2. Congr. Nat. Sci. 96—104 (1935).

Kurzer Vortrag über die bekannte Geschichte der projektiven Geometrie.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Luria, S.: Die Mechanik Demokrits. Acad. d. Wiss. SSSR, Abh. d. Inst. f. Geschichte d. Wiss. u. d. Techn., s. 1, 7, 178—180 (1936) [Russisch].

Nach dem Auszug zu urteilen legt Verf. dar, daß die Demokritische Mechanik der Archimedischen und modernen näher stehe als der Aristotelischen. Demokrit wird schon das Hebelgesetz zugesprochen. Schließlich Behandlung der Beziehungen der Atomistik zur Mechanik.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Dittrich, Arnošt: La table de la nouvelle lumière de la lune de Kidinnu. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Prague Nr 137, 1—34 u. franz. Zusammenfassung 35 (1935) [Tschechisch].

Soweit Ref. aus Résumé und Formeln ersehen kann, handelt es sich hauptsächlich um einen Vergleich der Kolonnen *A*, *B* und *F* mit der Rechnung nach Schochs Oxford-Tafeln und den daraus gewonnenen Nachweis sehr guter Annäherungen der antiken Angaben an die Wirklichkeit.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Rome, A.: Note sur le commentaire de l'Almageste par Théon d'Alexandrie. (*Bruxelles, 19.—23. VI. 1935.*) C. R. 2. Congr. Nat. Sci. 68—69 (1935).

Abel, Armand: La sélénographie d'Ibn al Haitham (965—1039) dans ses rapports avec la science grecque. (*Bruxelles, 19.—23. VI. 1935.*) C. R. 2. Congr. Nat. Sci. 76—81 (1935).

Collard, Auguste: Magister Jacobus Angelus de Ulma et son „Tractatus de Cometis“. (*Bruxelles, 19.—23. VI. 1935.*) C. R. 2. Congr. Nat. Sci. 82—88 (1935).

Humbert, Pierre: La découverte des phases de Mercure. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 395—396 (1936).

Aus einem Brief von Peiresc an Gassendi wird wahrscheinlich gemacht, daß Malapert der erste war, der die Mercur-Phasen beobachtet hat.

O. Neugebauer.

Algebra und Zahlentheorie.

Auerbach, H.: Un théorème sur les polynomes à n variables. *Studia Math.* 5, 171—173 (1935).

L'auteur démontre pour l'espace vectoriel à n dimensions le théorème suivant: Soit $\{S_i\}$ une suite de sphères de rayons égaux. S'il existe précisément k formes linéaires homogènes indépendantes L_1, L_2, \dots, L_k bornées dans l'ensemble $E = \sum S_i$, alors, tout polynome borné dans l'ensemble E , peut être représenté comme polynome en L :

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(L_1, L_2, \dots, L_k).$$

En particulier, si $k = 0$, chaque polynome borné dans E se réduit à une constante.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Haantjes, J.: Über die durch die Pentadesysteme gebildete X_9 in dem E_{16} der Sedenionen. *Nieuw Arch. Wiskde* 18, 46—58 (1936) [Holländisch].

Das System der Sedenionen ist isomorph dem Ring aller vierreihigen (komplexen) Matrizes. Ein Pentadesystem besteht aus allen Linearkombinationen von 5 Sedenionen (oder Matrizes) mit

$$\alpha_k^2 = \pm I, \quad \alpha_h \alpha_k = -\alpha_k \alpha_h. \quad (h, k = 1, \dots, s; h \neq k)$$

Ein Pentadesystem ist also ein linearer Raum E_5 in dem E_{16} aller Sedenionen. Alle diese E_5 liegen auf einer algebr. Mannigfaltigkeit X_9 , die hier näher untersucht wird. — Deutet man die vierreihigen Matrizes als Kollineationen in einem projektiven Raum S_3 , so entsprechen den Pentadesystemen lineare Systeme von je ∞^4 Kollineationen. Jede

Kollineation eines solchen Systems ist Produkt von zwei Nullkorrelationen in involutorischer Lage. Bildet man nun die Geraden des S_3 nach Klein auf die Punkte einer Quadrik Q in S_5 ab, so entsprechen den Nullsystemen beliebige Punkte von S_5 , den Paaren involutorischer Nullsysteme konjugierte Punktepaare R, S in bezug auf Q . Das Produkt zweier involutorischer Nullsysteme hängt nur von der Verbindungslinie RS ab. Jeder der ∞^8 Geraden RS in S_5 entspricht somit eine einem Pentadesystem angehörige Kollineation. Hält man den Punkt R fest und läßt S die Polarehyperebene von R durchlaufen, so erhält man die ∞^4 Korrelationen eines Pentadesystems. Aus dieser Erzeugungsweise liest man alle Eigenschaften der Pentadesysteme ab. Die Matrizes β der ∞^8 Korrelationen, welche Pentadesystemen angehören, sind durch die Bedingungen $\text{Sp}(\beta) = 0$; $\beta^2 = \frac{1}{4} \text{Sp}(\beta^2) \cdot I$

gekennzeichnet.

van der Waerden (Leipzig).

Rainich, G. Y.: Spinors and tensors. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 104—106 (1936).
Fuller, Gordon: On the invariant character of a system of partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 107—114 (1936).

Grundsätzlich muß es möglich sein, jede Spinorrelation durch Tensorrelationen zu ersetzen, indem man diejenigen Relationen ermittelt, welche auf Grund der betreffenden Spinorrelationen zwischen den aus den fraglichen Spinoren gebildeten Tensoren bestehen. Dieser Gedanke (Rainich) wird durchgeführt (Fuller) für eine Vereinfachung (Spezialisierung) der bekannten Diracschen Elektromagnetischen Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{2} \psi; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2} \varphi; \quad (1)$$

aus φ, ψ ist der Vektor

$$u = \varphi^* \psi + \psi^* \varphi; \quad v = \varphi^* \psi - \psi^* \varphi; \quad w = |\varphi|^2 - |\psi|^2 \quad (2)$$

und der Skalar

$$\varrho = |\varphi| + |\psi|^2 \quad (3)$$

zu bilden. — Dies System (1), (2), (3) ist äquivalent mit folgenden Vektorgleichungen:

$$\varrho^3 \text{rot} \left(\frac{1}{\varrho} \text{rot} \sqrt{\varrho} \right) = \mathfrak{B};$$

$$\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z) = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

P. Jordan (Rostock).

MacLane, Saunders: Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry. Amer. J. Math. **58**, 236—240 (1936).

Matroide [im Sinne von H. Whitney, Amer. J. Math. **57**, 509—533 (1935); dies. Zbl. **12**, 4] werden durch abstrakte geometrische Konfigurationen dargestellt. Weiter wird gezeigt, daß es Matroide vom Range 3 gibt, die sich durch eine Matrix in einem gegebenen (endlichen) algebraischen Zahlkörper K darstellen lassen, während jede andere Matrixdarstellung nur in einem K enthaltenden Körper möglich ist. Schließlich erweist sich jedes Matroid durch Matrizen in einem geeigneten (endlichen) algebraischen Zahlkörper darstellbar.

Reinhold Baer (Princeton, N. J.).

Kurosch, Alexander: Durchschnittsdarstellungen mit irreduziblen Komponenten in Ringen und in sogenannten Dualgruppen. Rec. math. Moscou **42**, 613—616 (1935).

Ist A eine Dedekindsche Struktur [im Sinne von O. Ore, Ann. of Math. **36**, 406 bis 437 (1935); dies. Zbl. **12**, 5, oder ein B -lattice im Sinne von G. Birkhoff, Proc. Cambridge Philos. Soc. **29**, 441—464 (1933); **30**, 115—122 (1934); dies. Zbl. **7**, 395 u. **9**, 55], das Element a aus A Durchschnitt der Elemente $a_i, i = 1, \dots, n$, und Durchschnitt der Elemente $b_j, j = 1, \dots, m$, und sind diese Darstellungen unverkürzbar

und keines der Elemente a_i und b_j echter Durchschnitt, so ist $n = m$, und jedes a_i kann gegen ein geeignetes b_j ausgewechselt werden. Naturgemäß gilt auch der duale Satz, in dem überall der Begriff „Durchschnitt“ durch „Summe“ ersetzt wird. *R. Baer.*

Witt, Ernst: Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f . J. reine angew. Math. **174**, 237—245 (1936).

R sei ein Körper der Charakteristik p , \mathfrak{G} eine beliebige p -Gruppe. Es werden sämtliche galoisschen Körper K/R mit zu \mathfrak{G} isomorpher Gruppe konstruiert: In der additiven Gruppe aller Zahlen a aus R bilden die Zahlen $a^p - a$ eine Untergruppe von einem Index p^N ($N = 0, 1, \dots, \infty$). n sei die kleinste Erzeugendenanzahl von \mathfrak{G} . Dann und nur dann existiert ein Körper K/R mit zu \mathfrak{G} isomorpher Gruppe, wenn $n \leq N$ ist. Ist $N = \infty$, so existieren zu jedem \mathfrak{G} unendlich viele K , ist N endlich, so ist die Anzahl der K gleich $(1/\Omega) p^{N(f-n)}(p^N - 1)(p^N - p) \dots (p^N - p^{N-1})$, wobei Ω die Anzahl aller Automorphismen von \mathfrak{G} bedeutet. Die Konstruktion von K wird schrittweise vorgenommen, im wesentlichen nach einer additiv gewendeten Methode von R. Brauer (vgl. dies. Zbl. **4**, 291): g sei eine charakteristische Untergruppe von \mathfrak{G} vom Exponenten p , die im Zentrum und in der von allen Elementen $xyx^{-1}y^{p-1}$ erzeugten charakteristischen Untergruppe \mathfrak{G}^* von \mathfrak{G} liegt. Es sei \mathfrak{G}^* echte Untergruppe und $\Gamma = \mathfrak{G}/g$. \mathfrak{G} läßt sich als verschränktes Produkt von Γ mit g darstellen mit Faktorensystem g_σ, τ in g . Die Körper k/R mit zu Γ isomorphen Gruppen seien schon konstruiert. Jedes K/R erhält man in folgender Weise: Es wird 1. eine Abbildung $\sigma \rightarrow s$ von Γ auf die Automorphismengruppe von k/R festgelegt, 2. eine Basis $\chi^{(v)}$ für die im Primkörper liegenden additiven Charaktere von g gewählt, 3. in k eine Lösung $\delta_s^{(v)}$ von $\chi^{(v)}(g_\sigma, \tau) = \delta_s^{(v)} + s \cdot \delta_{\tau}^{(v)} - \delta_{s\tau}^{(v)}$ bestimmt, 4. in k eine Lösung $\gamma^{(v)}$ von $(\delta_s^{(v)})^p - \delta_s^{(v)} = (s-1)\gamma^{(v)}$. Durch Adjunktion sämtlicher Wurzeln der Gleichungen $x^p - x = \gamma^{(v)}$ entsteht K . Ist \mathfrak{G} zyklisch, so ergeben sich die Resultate von E. Artin und O. Schreier [vgl. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **5**, 225—231 (1927)] und A. A. Albert (vgl. dies. Zbl. **10**, 4) wieder. — Schließlich wird die Konstruktion von Quaternionenkörpern auch für Charakteristik $\neq 2$ vollständig erledigt: $k = R(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ sei ein Körper mit der Vierergruppe, $\xi_i^2 = a_i$, $\prod \xi_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$). Dann und nur dann gibt es Quaternionenkörper K über R , $k \subset K$, wenn die quadratischen Formen $\sum a_\mu x_\mu^2$ und $\sum y_\nu^2$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) äquivalent sind. Ist dies der Fall, $x_\mu = \sum p_{\mu\nu} y_\nu$, $|p_{\mu\nu}| = 1$, so erhält man in der Form $K = R(\sqrt{r}(p_{11}\xi_1 + p_{22}\xi_2 + p_{33}\xi_3))$ alle Quaternionenkörper (r durchläuft alle Zahlen $\neq 0$ von R). *Köthe (Münster i. W.).*

Sugawara, Masao: Zur Theorie der komplexen Multiplikation. I. J. reine angew. Math. **174**, 189—191 (1936).

In der komplexen Multiplikation ist die Frage noch offen, ob sich jeder relativ-abelsche Körper über einem imaginär-quadratischen Körper Ω allein durch einen singulären Wert der Weberschen τ -Funktion erzeugen läßt oder ob man dazu noch einen singulären Wert der j -Funktion braucht. Verf. beweist, daß speziell für ein echtes Multiplum \mathfrak{m} von 4 der Strahlklassenkörper mod \mathfrak{m} über Ω allein durch den singulären Wert $\tau(\mathfrak{f}^*)$ erzeugt wird, wo \mathfrak{f}^* eine Strahlklasse mod \mathfrak{m} von Ω ist. *Hasse.*

Watson, G. N.: Singular moduli (4). Acta Arithmet. **1**, 284—323 (1936).

In Fortführung älterer Arbeiten des Verf. [Proc. London Math. Soc. (2) **40** (1935); dies. Zbl. **12**, 197] wird hier die Theorie der komplexen Multiplikation elliptischer Funktionen weitergetrieben. Die Gaußsche Theorie quadratischer Formen negativer Determinante $-n$ zeigt die zugehörige Klassenanzahl h gleich dem Grad gewisser ganzer algebraischer Zahlen F_n . Die Aufstellung der irreduziblen Bestimmungs-
gleichung solcher „Klasseninvarianten“ $F_n = 2^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{24} \sqrt{n}} \prod_{\substack{1 \\ 1}}^{\infty} \{e^{\pi \sqrt{n}(1-2m)} + 1\}$ für die
75 Fälle $0 < n < 600$; $n+1 \equiv 0 \pmod{8}$ baut eine von Greenhill begonnene Tabellierung erheblich aus. Die rechnerischen Hilfsmittel zum Aufbau des gewünschten

Tafelwerkes werden früheren Bearbeitungen gegenüber vereinfacht durch Verwendung arithmetischer Gedanken. Über die Angabe der Klassengleichung hinaus leistet G. N. Watson sodann deren Auflösung in einer Reihe von Fällen durch Adjunktion quadratischer und kubischer Irrationalitäten. Im Falle $n = 247$, den wir als einfaches Beispiel anführen, reduziert sich z. B. mit Adjunktion der $\sqrt[3]{13}$ die Bestimmung eines $F_n = F$ von

$$F^6 - 4F^5 - 7F^4 - 7F^3 - 6F^2 - 3F - 1 = 0 \text{ auf } F^3 - (2 + \sqrt[3]{13})F^2 + F - \frac{3 + \sqrt[3]{13}}{2} = 0.$$

Wilhelm Maier (Freiburg i. Br.).

Hasse, Helmut: Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. 1, 119—129 (1935).

Für die Meromorphismentheorie elliptischer Körper werden die bisherigen Begründungen (Hambg. Abh. 10; dies. Zbl. 11, 197) durch rein strukturelle ersetzt, d. h. ohne explizite Additionsformeln. Die Riemannsche Vermutung für elliptische Körper wird ebenfalls neu bewiesen, und zwar ohne Gradabschätzungen und ohne den Dirichletschen Einheitensatz. Genaue Ausführungen sollen in Crelles Journal erscheinen. — Ein Meromorphismus λ des Körpers K ist eine isomorphe Abbildung von K auf einen Teil $K\lambda$ von sich, mit dem Grad $(K:K\lambda) = N(\lambda)$. Durch λ möge das Element z in $z\lambda$ übergehen. $\lambda_1 \lambda_2$ werde durch $z(\lambda_1 \lambda_2) = (z\lambda_1) \lambda_2$ erklärt. Es gilt $N(\lambda_1 \lambda_2) = N(\lambda_1) N(\lambda_2)$. K sei ein elliptischer Körper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper k . Es ist zweckmäßig, einen Primdivisor \mathfrak{p} von K als uneigentlichen Meromorphismus anzusehen, der jeder Funktion z ihren Wert $z\mathfrak{p}$ an der Stelle \mathfrak{p} zuordnet; für eigentliches λ ist dann $\lambda\mathfrak{p}$ uneigentlich, und zwar ist $\lambda\mathfrak{p} = (N_{K/K\lambda}\mathfrak{p})\lambda^{-1}$. \mathfrak{o} sei ein fester Primdivisor von K . Mit $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ werde derjenige Primdivisor \mathfrak{p}_3 bezeichnet, der sich aus $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{p}_2/\mathfrak{o} \sim \mathfrak{p}_3/\mathfrak{o}$ ergibt. Die zugehörige Additionsgruppe D_0 der Primdivisoren ist isomorph mit der Divisorengruppe nullten Grades D . μ heißt normiert, wenn $\mu\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ ist, für solche μ gilt $\mu(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) = \mu\mathfrak{p}_1 + \mu\mathfrak{p}_2$. \mathfrak{o} ist der einzige normierte uneigentliche Meromorphismus (0). — Sind x, y Elemente mit den Nennern $\mathfrak{o}^2, \mathfrak{o}^3$, so ist $K = k(x, y)$ mit $f(x, y) = 0$. Die uneigentlichen Meromorphismen \mathfrak{P} des Hilfskörpers $K(X, Y)$ mit $f(X, Y) = 0$ entsprechen den Meromorphismen λ von $k(x, y)$ vermöge $(X\mathfrak{P}, Y\mathfrak{P}) = (x\lambda, y\lambda)$. Dabei entspreche $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ der Meromorphismus $\lambda_1 + \lambda_2$. Es folgt leicht die Regel $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathfrak{p} = \lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p}$, also bilden die normierten Meromorphismen μ von K einen Ring M (mit 1). — Für das endliche Differential $du = dx/f_y(x, y)$ wird $(du)\lambda = d(x\lambda)/f_y(x\lambda, y\lambda)$ erklärt. Durch Zurückgehen auf $K(X, Y)$ folgt leicht $(du)(\lambda_1 + \lambda_2) = (du)\lambda_1 + (du)\lambda_2$. $(du)\lambda \neq 0$ bedeutet, daß $K/K\lambda$ separabel-algebraisch ist; für ein solches λ ist $K/K\lambda$ abelsch, und die arithmetische Theorie lehrt, daß es $N(\lambda)$ Lösungen \mathfrak{p}_i von $\lambda\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}$ gibt. — Den Schlüssel zur Strukturtheorie des Ringes M liefert die Divisorenzerlegung $x\mu - x\nu \cong \mathfrak{o}(\mu + \nu) \cdot \mathfrak{o}(\mu - \nu)/(\mathfrak{o}\mu)^2 \cdot (\mathfrak{o}\nu)^2$, aus der sich die Normenidentität $N(\mu + \nu) + N(\mu - \nu) = 2N(\mu) + 2N(\nu)$ ergibt. Über Ringe mit dieser Identität vgl. die unten ref. Arbeit von Behrbohm: jeder Meromorphismus μ genügt einer imaginär-quadratischen Gleichung $\varphi(\mu) = \mu^2 + (N(\mu) - 1) - N(\mu) - 1) \mu + N\mu = 0$. — Die Koeffizienten von $f(x, y)$ mögen im Körper k_q aus q Elementen liegen. Durch $(x\pi, y\pi) = (x^q, y^q)$ wird ein normierter Meromorphismus π erklärt mit $N(\pi) = q$, $(du)\pi = 0$. In folgender Weise läßt sich zeigen, daß $N(\pi - 1)$ gleich der Klassenanzahl h von $K_q = k_q(x, y)$ ist: Wegen $(du)(\pi - 1) = -du \neq 0$ ist $N(\pi - 1)$ gleich der Lösungszahl von $(\pi - 1)\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$, oder von $\pi\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, oder von $(x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) = (x\pi\mathfrak{p}, y\pi\mathfrak{p}) = ((x\mathfrak{p})^q, (y\mathfrak{p})^q)$. Diese Relation sondert unter den Primdivisoren \mathfrak{p} von K diejenigen aus, die bereits in K_q liegen, und deren Anzahl ist gerade h . Folglich genügt π der imaginär-quadratischen Gleichung $\varphi(\pi) = \pi^2 + (h - q - 1)\pi + q = 0$. Die Riemannsche Vermutung für den Körper K_q folgt nun ohne weiteres aus der Tatsache, daß $\varphi(q^s) = q^{2s} + (h - q - 1)q^s + q$ bis auf einen unwesentlichen Faktor die ζ -Funktion von K_q darstellt.

Ernst Witt (Göttingen).

Behrbohm, Hermann: Über die Algebraizität der Meromorphismen eines elliptischen Funktionenkörpers. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F.* **1**, 131—134 (1935).

Jedem Element x eines Ringes M (mit 1) sei eine natürliche Zahl $[x]$ zugeordnet, und es sei $A_1: [x+y] + [x-y] = 2[x] + 2[y]$; $A_2: [xy] = [x][y]$; $A_3: [x] \neq 0$ für $x \neq 0$. Dann besteht M entweder aus allen ganzrationalen Zahlen, oder M ist Ordnung eines imaginär-quadratischen Körpers bzw. Schiefkörpers. (Vgl. die oben ref. Arbeit von Hasse.) — Beweis. Es werde $[x+y] - [x] - [y] = 2(x, y)$ und $2(x, y+z) - 2(x, y) - 2(x, z) = [x+y+z] - [x+y] - [x+z] - [y+z] + [x] + [y] + [z] = (x, y, z)$ gesetzt. $y = 0, x = 0, x = y$ in A_1 ergibt $[0] = 0, [-x] = [x], [2x] = 4[x]$. Aus A_1 folgt jetzt $(x, -y) = -(x, y)$, also ist $(-x, y, z) = (x, -y, -z) = -(x, y, z)$, daher ist das symmetrische Symbol $(x, y, z) = 0$, d. h. es gilt die Regel $R_1: (x, y+z) = (x, y) + (x, z)$. Ferner ist $(x, x) = [x]$, also $R_2: [x+y] = [x] + 2(x, y) + [y]$, und für ganzzahliges m gilt $[mx] = m^2[x]$. — Wegen A_2, A_3 hat M die Charakteristik 0, M hat keine Nullteiler. Es ist $[1] = 1$, ferner $R_3: [x](y, z) = (xy, xz)$. — Nun werde das ganzzahlige Polynom $x^2 - 2(x, 1)x + [x] = X$ gesetzt. Wird $[X]$ nach R_2 ausgeklammert, so kommt $2[x]\{[x] - 2(x, 1)^2 + (x^2, 1)\}$. Wegen $2(x, 1)^2 = \{[x+1] - [x] - 1\}(x, 1) = (x^2 + x, x+1) - (x^2, x) - (x, 1) = [x] + (x^2, 1)$ ist $[X] = 0$, also genügt x der Gleichung $X = 0$. Die Diskriminante ist ≤ 0 wegen $[x] - (x, 1)^2 = [x - (x, 1)] \geq 0$. Jetzt folgt die behauptete Struktur von M .

Ernst Witt (Göttingen).

Behrbohm, H., und L. Rédei: Der Euklidische Algorithmus in quadratischen Körpern. *J. reine angew. Math.* **174**, 192—205 (1936).

Die Frage, für welche quadratfreien positiven ganzen rationalen Zahlen m im quadratischen Körper $K(\sqrt{m})$ der Euklidische Algorithmus (kurz: E.A.) gilt, ist in den letzten Jahren vielfach untersucht worden, z. B. von Perron (dies. Zbl. **5**, 387), Oppenheim (dies. Zbl. **8**, 195), Remak (dies. Zbl. **10**, 247), Berg (dies. Zbl. **12**, 102), Hofreiter (dies. Zbl. **9**, 243 u. **13**, 149). Zunächst wurde für einige spezielle Werte von m das Vorhandensein bzw. das Nichtvorhandensein des E.A. festgestellt; dann gelang es Berg zu zeigen, daß im Falle $m \equiv 1 \pmod{4}$, außer für $m = 2, 3, 6, 7, 11, 19$ in $K(\sqrt{m})$ der E.A. nicht gilt. Die Verf. beweisen dies aufs neue mit einer einfacheren Methode und greifen dann den Fall $m \equiv 1 \pmod{4}$ an. Hier gelingt es noch nicht, zu abschließenden Ergebnissen zu kommen, aber doch sehr starke Einschränkungen für die Gültigkeit des E.A. aufzustellen. Unter anderem gelten die Sätze: „In der Restklasse $m \equiv 5 \pmod{8}$ gibt es keine zusammengesetzten Zahlen derart, daß im Körper $K(\sqrt{m})$ der E.A. gilt“, und: „In $K(\sqrt{m})$ mit $m \equiv 5 \pmod{24}$ existiert der E.A. nur für $m = 5$ oder $m = 29$.“

Bessel-Hagen (Bonn).

Toscano, Letterio: Sui coefficienti della tangente e sui numeri di Bernoulli. *Boll. Un. Mat. Ital.* **15**, 8—12 (1936).

„Zusammenfassung. — Der Verf. beansprucht das Eigentumsrecht an seinen Zahlen A_{rs} , die durch die Festsetzungen $A_{r1} = 1, A_{rr} = 1, A_{rs} = 0$ für $s > r, A_{rs} = sA_{r-1,s} + (r-s+1)A_{r-1,s-1}$ erklärt sind, und leitet zwei neue Darstellungen der Tangentenkoeffizienten und der Bernoullischen Zahlen her.“ — Die Zahlen A_{rs} , die der Verf. in einer früheren Abhandlung (dies. Zbl. **8**, 203) eingeführt hat, kommen

unter der Bezeichnung $\overset{r}{A}_s$ bei Saalschütz, Bernoullische Zahlen, S. 65, vor, ebenso die Darstellung (8) für die Tangentenkoeffizienten ebenda als Formel von Laplace Nr. LII.

L. Schrutka (Wien).

Gloden, A.: Notes d'arithmétique. *Nieuw Arch. Wiskde* **18**, 84—86 (1936).

Eine Lösung von $(y_1 + y_2)^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$. Gleichungen wie dies. Zbl. **12**, 149 A. Moessner.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Pall, Gordon: A property of the solutions of $t^2 - du^2 = 4$. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, 81 (1936).

Wright, E. Maitland: On Tarry's problem. I. Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 261 bis 267 (1935).

Write $l_h = a_1^h + \dots + a_t^h$. Let $N(k)$ denote the least t for which two different sets $[a_1, \dots, a_t]$ of positive integers exist having the same values for l_1, l_2, \dots, l_k ; and let $M(k)$ denote the least t for which sets a_i exist with equal l_1, \dots, l_k , but unequal l_{k+1} . Wright proves

$$N(k) \leq \frac{1}{2}(k^2 + 4), \quad M(k) \leq N(k^2). \quad (1)$$

The proof of (1) for k odd ($= 2m + 1$) considers the n^t sequences (a_1, \dots, a_t) of positive integers $\leq n$, which form at least $n^t/t!$ distinct sets; hence are formed at most $tn^h - t + 1$ values l_h . The number of sequences $(l_2, l_4, \dots, l_{2m})$ is less than

$$\prod_{h=1}^m (tn^{2h} - t + 1) < t^m \prod n^{2h} = t^m n^{t-1} \leq n^t/t!, \quad \text{if we choose } t = m^2 + m + 1,$$

$n \geq t! t^m$. Then two sets $[a_1, \dots, a_t]$ exist with the same values $l_{2h} (h = 1, \dots, m)$; the sets of $n + 1 \pm a_i$ have the same values $l_h (h = 1, \dots, 2m + 1)$. The proof for k even is similar. Several lemmas yield (1₂): if the values of l_{k+1}, \dots, l_t are fixed by those of l_1, \dots, l_k , then $N(k) > t$; if the value of l_{k+t} is determined by those of l_1, \dots, l_k , then the values of $l_{k+i} (i = 1, \dots, t - 1)$ are likewise determined; if l_{k+1} is fixed by l_1, \dots, l_k , then $l_{(k+1)r}$ is fixed by $l_r, l_{2r}, \dots, l_{kr}$, and consequently $l_1, \dots, l_{r(k+1)}$ by l_1, \dots, l_{rk} , and hence l_1, \dots, l_t by l_1, \dots, l_{k^2} . It is probable that $M(k) = N(k) = k + 1$, so far known for $k \leq 7$. It is shown that $M(k) = N(k)$ for infinitely many k , and remarks are made on the order of $v(k)$ and $\Delta(k)$. (See this Zbl. 10, 103; 11, 248 and 296; 12, 150 and 196.)

G. Pall (Montreal).

Lehmer, Emma: On a resultant connected with Fermat's last theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 864—867 (1935).

Verf. beweist folgenden Satz: „ A_{p-1} ist divisibel by $p^{p-2}q_2$ for every prime p , where q_2 is the Fermat quotient $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ “, wobei $p > 2$ eine Primzahl und Δ_n die aus den Zahlen 1, $\binom{1}{n}$, $\binom{2}{n}$, \dots , $\binom{n-1}{n}$ gebildete Zirkulante bezeichnet. Für $n = 6k$ beweist Verf., ist $\Delta_n = 0$, und demnach erhält Verf. als Folgerung einen Lubelskischen Satz: p^8/Δ_{p-1} , für $p \geq 7$ [vgl. dies. Zbl. 11, 148 (1935)]. Lubelski (Warschau).

Heilbronn, H., E. Landau und P. Scherk: Alle großen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen. Čas. mat. fys. 65, 117—140 (1936).

„Sei M eine Menge natürlicher Zahlen m und $M(x)$ die Anzahl der $m \leq x$. Sei $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} > \frac{1}{h}$, $h > 0$. Dann sind alle großen u als Summen von h Zahlen m und höchstens $h - 1$ Einsen darstellbar.“

Wendet man diesen Satz, den Verff. aus einem ähnlichen Satz von Khintchine herleiten, an auf die Menge der m , für die $30m$ als $p + p'$ darstellbar ist, so erhält man für die Schnirelmannsche Konstante S eine Abschätzung $S \leq 2h + 3$, sofern die Goldbachsche Vermutung bis $30h + 1$ richtig ist. Es handelt sich also darum, für das h der genannten Menge eine Abschätzung zu finden.

— Mit $A(x) = \sum_{x=p+p'} 1$ ist $\sum_{\substack{1 \leq y \leq x \\ y \equiv 0 \pmod{30}}} A(y) \sim \frac{1}{2\varphi(30)} \frac{x^2}{\log^2 x}$. Ist A definiert durch

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \equiv 0 \pmod{30}}} \frac{A(x)}{x \sum_{q|x} \frac{1}{\psi(q)}} \leq A, \quad \psi(q) = \prod_{p|q} (p-2), \quad (30, q) = 1, q \text{ quadratfr.},$$

so ergibt sich

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\log^4 \xi}{\xi^3} \sum_{\substack{1 \leq y \leq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{30}}} A^2(y) \leq \frac{1}{24} \alpha A, \quad \alpha = \sum_q \frac{1}{\varphi(q) \psi(q)}$$

und dann

$$h \leq \left[\frac{16}{45} \alpha A \right] + 1 \quad \text{aus} \quad \left(\sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A(y) \right)^2 \leq M(x) \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A^2(y).$$

Durch Vertiefung der Methoden aus Landaus Arbeit „Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz“ (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1930, 255—276) wird für A ein von einem Parameter θ abhängiger Ausdruck gewonnen, der nach Einsetzen eines geeigneten Zahlwertes für θ die Abschätzung $h \leq 34$, also $S \leq 71$ ergibt.

H. Spies (Hamburg).

Kober, H.: Funktionen, die den Potenzen der Riemannschen Zetafunktion verwandt sind, und Potenzreihen, die über den Einheitskreis nicht fortsetzbar sind. J. reine angew. Math. 174, 206—225 (1936).

The functions considered are

$$\sum_{\substack{n \equiv \alpha \pmod{k} \\ n \neq 0}} d_h(|n|) |n|^{-s}, \quad \sum_{\substack{n \equiv \alpha \pmod{k} \\ n \neq 0}} d_h(|n|) n |n|^{-s-1}.$$

where $d_h(n)$ is the number of expressions of n as a product of h factors. Functional equations for these functions are obtained, and results on finite sums such as

$$\sum_{n=1}^x d_h(n) \frac{\cos 2\pi n v}{\sin 2\pi n v}$$

deduced. It is also proved, for example, that the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_h(n) x^n \frac{\cos 2\pi n v}{\sin 2\pi n v}$$

have the unit circle as a natural boundary. See a previous paper by the author referred to in this Zbl. 12, 71.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Tchudakoff, N.: Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 191 bis 193 (1936).

A new method, due to Vinogradoff (see this Zbl. 12, 247), of estimating sums of the form $\sum e^{2\pi i f(x)}$, is applied to the Riemann zeta-function and the prime-number problem. The results are that $\zeta(s)$ has no zeros in a region $\sigma \geq 1 - c(\log t)^{\vartheta-1}$, $t \geq t_0$, where $0 < \vartheta < \frac{1}{3}$; and that

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\log x} + O(xe^{-c(\log x)^\mu}),$$

where $\frac{1}{2} < \mu < \frac{2}{3}$. These results form a striking advance on what was previously known. The proofs, which are not given, will be awaited with great interest.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Vinogradow, I.: On Weyl's sums. Rec. math. Moscou 42, 521—529 (1935).

Verf. beweist folgenden Satz: „Let n be an integer ≥ 20 , $v = \frac{1}{n}$; a_0, \dots, a_n are real, $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$, $a_0 = \frac{a}{q} + \theta q^{-2+v^2}$, $(a, q) = 1$, $q > 0$, $|\theta| \leq 1$, Q and P are integers; $0 < P \leq c_0 P_1$, c_0 depending only on n . Then putting

$$Q = \frac{v^6}{12(\log n + 1)^2}, \quad P_1 = q^{2v-2v^2+v^3} \quad \text{or} \quad Q = \frac{v^7}{45(\log n + 1)^2},$$

$$P_1 = q^{\frac{2}{2n-1}} \quad \text{we have} \quad \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)} \leq c P_1 q^{-e},$$

where c depends only on n , „der für diophantische Approximationen, Waring'sches Problem (vgl. nachstehendes Referat) und Zetafunktion [vgl. N. Tschudakoff: Sur les zeros de fonction $\zeta(s)$; C. R. 202, 191 (1936) (vgl. vorstehendes Referat)] von Wichtigkeit ist.

Lubelski (Warschau).

Vinogradow, I.: An asymptotic formula for the number of representations in Waring's problem. Rec. math. Moscou 42, 531—534 (1935).

Verf. wendet seinen Satz über Weylsche Summen (vgl. vorstehendes Referat) auf die Hardy-Littlewoodsche Formel

$$I_N = \frac{\{\Gamma(1+v)\}^2}{\Gamma(rv)} N^{rv-1} \mathfrak{S} + O(N^{rv-1-\delta}), \quad v = \frac{1}{n}, \quad \delta = \delta(n) > 0,$$

an, wobei I_N die Anzahl der Darstellungen der Zahl N durch die Form $N = x_1^n + \dots + x_r^n$ bedeutet, um zu beweisen, daß diese Formel gilt, wenn nur $n \geq 20$, $r > 91 n^8 (\log n + 1)^2$, $\delta = 0,2v$. Inzwischen hat Verf. diese Abschätzung weiter verschärft [vgl. I. Vinogradow, Sur les nouveaux resultats de la theorie analytique des nombres. C. R. **202**, 179 (1936); vgl. nachstehendes Referat].

Lubelski (Warschau).

Vinogradoff, I.: Sur les nouveaux résultats de la théorie analytique des nombres. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 179—180 (1936).

Refinements of previous results of the author are stated without proof. First, approximations are given to sums $\sum e^{2\pi i f(x)} (x = 1, \dots, P)$, where f is a real polynomial of degree ≥ 20 . Second, the Hardy-Littlewood singular series for the number of representations as a sum of r n -th powers is valid for $r > 131 n^5 \log^2 n$ if $n > 20$. Third, relations of the type $|f(x) - m - \beta| < cq^{-e}$ exist, where $q^{-1} = 5n^2 \log 10n$, f is a real polynomial of degree $n + 1 \geq 11$, with leading coefficient $(a/q) + \theta/q^2$, $|\theta| \leq 1$. (See this Zbl. **12**, 247 and 291.)

G. Pall (Montreal).

Vinogradow, I.: Approximations with help of certain fractions. Ann. of Math., II. s. **37**, 101—106 (1936).

Englische, in einigen Punkten etwas detailliertere Fassung einer früheren russischen Arbeit (dies. Zbl. **11**, 296; daselbst Formulierung des wichtigen Ergebnisses). Der Beweis beruht auf einer sehr scharfen Abschätzung trigonometrischer Summen des Weylschen Typus, benutzt aber nicht die Weylsche Abschätzungsmethode, vor allem keine Induktion nach dem Grad n .

J. F. Koksma (Amsterdam).

Gruppentheorie.

Miller, G. A.: General theorems applying to all the groups of order 32. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **22**, 112—115 (1936).

Die allgemeinen Sätze über Gruppen der Ordnung 2^m , insbesondere die vom Autor [s. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 1054 (1933)] abgeleiteten Sätze über Gruppen, in denen die Quadrate der Elemente eine Untergruppe von gegebenem einfachem Typ erzeugen, reichen zur Aufzählung der Gruppen der Ordnung 32 aus. Magnus.

Schilling, Otto F. G.: Über die Darstellungen endlicher Gruppen. J. reine angew. Math. **174**, 188 (1936).

Die Frage, ob alle Darstellungen einer endlichen Gruppe \mathfrak{G} der Ordnung n sich im Körper der n -ten Einheitswurzeln schreiben lassen, ist noch immer offen. Wenn \mathfrak{G} auflösbar ist, ist eine solche Schreibweise immer möglich, wie I. Schur (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1906**, 164—184) gezeigt hat. Verf. weist darauf hin, daß im Spezialfall von Gruppen von Primzahlpotenzordnung sich das Schursche Ergebnis fast unmittelbar aus den Hasseschen Resultaten (dies. Zbl. **3**, 244; **6**, 152) herleiten läßt. Brauer.

Seitz, Frederick: On the reduction of space groups. Ann. of Math., II. s. **37**, 17 bis 28 (1936).

Es gibt bekanntlich 230 kristallographische Raumgruppen. Die Darstellungstheorie dieser Raumgruppen ist für die Quantenphysik der Kristalle von Interesse. Beschränkt man sich auf Darstellungen endlichen Grades, so kann man alle möglichen Darstellungen einer Raumgruppe \mathfrak{G}_1 finden, indem man eine Kompositionsreihe $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_m$ bildet, in welcher $\mathfrak{G}_m = \Gamma$ die Gruppe der in \mathfrak{G}_m enthaltenen Translationen bedeutet, während $\mathfrak{G}_h/\mathfrak{G}_{h+1}$ zyklische Gruppen von Primzahlordnung sind: $\mathfrak{G}_h = b\mathfrak{G}_{h+1}$, b^p in \mathfrak{G}_{h+1} . Hat man nun eine irreduzible Darstellung σ von \mathfrak{G}_{h+1} schon gefunden, in welcher das Gruppenelement a durch die Matrix A dargestellt wird, und ist die Darstellung $b a b^{-1} \rightarrow A$ mit σ äquivalent, so läßt sich die Darstellung von \mathfrak{G}_{h+1} zu einer Darstellung gleichen Grades von \mathfrak{G}_h erweitern, wobei höchstens eine p -te Einheitswurzel in der Darstellung von b willkürlich ist; ist dagegen $b a b^{-1} \rightarrow A$ inäquivalent σ , so gibt es eine einzige irreduzible Darstellung von \mathfrak{G}_h ,

welche für \mathcal{G}_{h+1} in p inäquivalente Darstellungen $b^v a b^{-v} \rightarrow A$ von gleichem Grade wie σ zerfällt. Die Anwendung dieser Methode auf die Raumgruppen wird noch näher erläutert.

van der Waerden (Leipzig).

Freudenthal, Hans: Einige Sätze über topologische Gruppen. Ann. of Math., II. s. 37, 46—56 (1936).

„Gruppe“ heißt hier: separable topologische Gruppe. „Homomorphismus“ heißt stetiger Homomorphismus. Ein Homomorphismus ist dann und nur dann gebietstreu (d. h. offene Mengen gehen in offene über), wenn das Bild jeder offenen Menge einen inneren Punkt enthält oder wenn man zu jeder konvergenten Folge im Bild eine konvergente Folge von Urbildern finden kann. Eine Gruppe heißt „vollständig“, wenn jede Fundamentalfolge $\{a_n\}$ mit $\lim_{m, n \rightarrow \infty} a_m^{-1} a_n = e$ in ihr konvergiert. Jede vollständige

Gruppe ist von zweiter Kategorie, d. h. nicht als abzählbare Summe von nirgends dichten Teilmengen darstellbar. Jede im kleinen kompakte Gruppe ist vollständig. Ein Homomorphismus einer vollst. Gruppe \mathcal{G} ist dann und nur dann gebietstreu, wenn das Bild \mathcal{G}' ebenfalls vollst. ist. Ein Homomorphismus einer im kleinen kompakten Gruppe ist dann und nur dann gebietstreu, wenn \mathcal{G}' von zweiter Kategorie ist. In diesem Fall ist \mathcal{G}' auch im kleinen kompakt. Ein Isomorphismus ist dann und nur dann topologisch (d. h. umkehrbar stetig), wenn er gebietstreu ist. Ein Homomorphismus läßt sich dann und nur dann durch Faktorgruppenbildung nach einem abgeschl. Normalteiler erzeugen, wenn er gebietstreu ist. Eine abgeschl. Untergruppe einer vollständigen Gruppe \mathcal{G} wird bei einem gebietstreuen Homomorphismus von \mathcal{G} dann und nur dann gebietstreu abgebildet, wenn ihr Bild wieder abgeschl. ist. Der erste Isomorphiesatz $\mathcal{G}/\mathcal{N} \cong \mathcal{G}'/\mathcal{N}'$ gilt für vollst. \mathcal{G} und abgeschl. \mathcal{G}' und \mathcal{N} dann und nur dann, wenn \mathcal{N} abgeschl. in \mathcal{G} ist. Der zweite Isomorphiesatz $\mathcal{G}/\mathcal{G}' \cong \mathcal{G}'/\mathcal{G}'$ gilt dann und nur dann für alle abgeschl. Normalteiler \mathcal{G}' von \mathcal{G} , wenn \mathcal{G} gebietstreu auf \mathcal{G}' abgebildet ist. Das homomorphe Bild einer im kleinen kompakten null-dimensionalen Gruppe ist nulldimensional. Sind \mathcal{G} und \mathcal{G}/\mathcal{G}' kompakt, so auch \mathcal{G}' . Es folgen dann noch einige Sätze über transitive Darstellungen von Gruppen durch eineindeutige Transformationen.

van der Waerden (Leipzig).

Freudenthal, Hans: Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen. Ann. of Math., II. s. 37, 57—77 (1936).

Eine komplexwertige Funktion $f(y)$ der Elemente y einer Gruppe G heißt nach J. v. Neumann (dies. Zbl. 9, 349) fastperiodisch, wenn jede Funktionenfolge $f(ya_n)$ sowie auch jede Folge $f(a_n y)$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Wie hier gezeigt wird, hat die eine Forderung die andere zur Folge. Weiter beschränkt Verf. sich auf topologische Gruppen und stetige fp. Funktionen. Eine solche Gruppe G besitzt „genügend viele“ fp. Funktionen, wenn es zu je zwei Gruppenelementen $a \neq b$ eine stetige fp. Funktion mit $f(a) \neq f(b)$ gibt. Nun wird gezeigt: I. Jede zusammenhängende separable im kleinen kompakte Gruppe mit genügend vielen fp. Funktionen ist direktes Produkt einer n -dimensionalen Vektorgruppe V und einer kompakten zus. sep. Gruppe K ; umgekehrt besitzt jedes solche $K \times V$ genügend viele fp. Funktionen. II. Die Gruppe K läßt sich G_v -adisch (im Sinne von D. v. Dantzig, dies. Zbl. 12, 6) durch eine Folge von kompakten Lieschen Gruppen erzeugen. III. Dann und nur dann ist K selbst Liesch, wenn K endlichdimensional und im kleinen zusammenhängend, oder wenn K im Kleinen zusammenziehbar ist. IV. Jede zus. sep. Gruppe mit genügend vielen fp. Funktionen läßt sich stetig isomorph in eine zus. sep. kompakte Gruppe einbetten. V. Die Gruppen $K \times V$ lassen sich unter den im Kleinen kompakten zus. sep. Gruppen auch dadurch charakterisieren, daß aus $\lim a_n = e$ folgt $\lim s_n a_n s_n^{-1} = e$, oder dadurch, daß es eine bei der Links- und Rechtsmultiplikation invariante Metrisierung der Gruppe gibt. II wurde unabhängig von Pontrjagin (dies. Zbl. 8, 246) gefunden. Zu I vgl. A. Weil (dies. Zbl. 10, 353).

van der Waerden (Leipzig).

Analysis.

Baidaff, B. I.: Über das Eliminationsverfahren, das bei arithmetischen und geometrischen Reihen und bei allgemeineren Zahlenfolgen verwendet wird. *Bol. mat.* 8, 181—185 (1935) [Spanisch].

Wiedergabe bekannter Relationen durch Determinanten. *F. Knoll* (Wien).

Lettenmeyer, Fritz: Über die sogenannte Hospitalsche Regel. *J. reine angew. Math.* 174, 246—247 (1936).

Ein neuer überaus einfacher Beweis der Hospitalschen Regel, der nicht von dem verallgemeinerten Mittelwertsatze der Differentialrechnung Gebrauch macht.

Rogosinski (Königsberg).

Waerden, B. L. van der: Eine einfache Herleitung der Stirlingschen Formel $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. *Nieuw Arch. Wiskde* 18, 40—45 (1936).

Es wird zunächst mit Hilfe einer elementaren Abschätzung von $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ die

Formel $\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \alpha e^{\frac{\vartheta}{12n}}$, $0 < \vartheta < 1$ (also mit genauer Fehlerabschätzung) hergeleitet.

Die einfachste Bestimmung von $\alpha = \sqrt{2\pi}$ geht dann natürlich über die Wallissche Formel. In den Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man aber auch zur Bestimmung von α das Gesetz der großen Zahlen heranziehen. Verf. führt dies durch eine einfache Darstellung der dazu nötigen asymptotischen Entwicklungen aus.

Rogosinski (Königsberg).

● **Dahr, Konstantin:** A course of integrational and operational calculus with applications to problems of physics and electrotechnics. Stockholm: Henrik Lindstahl 1935. 169 S. u. 12 Fig.

A well written presentation of the Heaviside theory intended for electrical engineers who are not satisfied with the usual purely formal manipulations. Contents: 1. The integral theorem. 2. The notion of integrator. Differentiation and integration. 3. A linear integral operator and its properties of composition. 4. The equivalence between integrators and integral operators. The inverse operations. 5. A table of some important integrational expressions and rules of calculus. Applications. 6. Application of integrators and operators to the solution of differential equations. 7. A general theory of rational integrators. The expansion theorem. 8. Extension of the expansion theorem to a class of meromorphic basic integrators. 9. Irrational integrators. The notion of fractional integration. Asymptotic expansions. 10. Special irrational integrators. 11. Applications to selected problems. [The vibrating string; the general wave equation; heat conduction; equation of telegraphy; a telephone disturbance problem; the double pole radiation problem.] 12. Some applications to linear integral equations. Nine appendices contain proofs omitted in the text, and principal formulas. Extensive bibliography. *Hille*.

Pospišil, Bedřich: Sur un problème de M. M. S. Bernstein et A. Kolmogoroff. *Čas. mat. fys.* 65, 64—76 (1936).

Le travail contient une étude de l'équation de Chapman ($s < u < t$)

$$\Phi(s, t; x, y) = \int \Phi(s, u; x, z) d\Phi(u, t; z, y) \quad (1)$$

et a pour but de donner une condition nécessaire et suffisante à la quelle doit satisfaire la fonction $A(t; x, y)$, où

$$A(s + 0; x, Y) = \left\{ \frac{d^+}{dt} \Phi(s, t; x, Y) \right\}_{t=s},$$

pour que l'équation (1) admette une solution unique $\Phi \geq 0$ normée de nature très générale déterminée par la condition initiale $\Phi(s, s; x, y) = 1$ ou 0, suivant que $x = Y$ ou $x \geq Y$.

S. Bernstein (Leningrad).

Corput, J. G. van der: Verteilungsfunktionen. *V. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 39, 149—153 (1936).

Herleitung eines Hilfssatzes für spätere Zwecke (für I—IV s. dies. Zbl. 12, 347; 13, 57, 160).

J. F. Koksma (Amsterdam).

Beckenbach, E. F.: On subharmonic functions. *Duke math. J.* **1**, 480—483 (1935).

The logarithm of a function $p(u, v)$, positive and continuous in a region, is subharmonic there if and only if $e^{\alpha u + \beta v} p(u, v)$ is subharmonic for every choice of the real constants α, β . The author remarks that this result of Montel and Radó can be stated in the following equivalent form: the logarithm of $p(u, v)$ is subharmonic if and only if $p(u, v) |f(w)|$ is subharmonic for every choice of the analytic function $f(w)$ of the complex variable $w = u + iv$. The following statement is typical of the geometrical consequences which the author derives from this remark. If the functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ are harmonic and satisfy $x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$, $x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0$ in a region R , then they are said to form a triple of conjugate harmonic functions. The surface determined by such a triple is a minimal surface given in terms of isothermic parameters. The author shows that the continuous functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ form a triple of conjugate harmonic functions in a region R if and only if the expression $[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}/(r^2 + s^2)^{1/2}$, considered as a function of r, s , is subharmonic for every choice of the real constants a, b, c , whenever the new variables r, s are defined by $r + is = \text{an analytic function, different from zero in the region } R$, of the complex variable $w = u + iv$.

Tibor Radó (Columbus).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Cope, Frances Thorndike: Formal solutions of irregular linear differential equations.

II. *Amer. J. Math.* **58**, 130—140 (1936).

In an earlier paper the author proved the formal existence theorem for the linear differential equation

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(n-i)}(x) = 0 \quad (1)$$

where $a_i(x)$ are rational functions of x . (I see this *Zbl.* **9**, 354.) This paper establishes that a set of linearly independent solutions of the type treated in the earlier paper determines an essentially unique equation of the form (1). The possibility of the reduction of the system

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

to a single equation is discussed and some general theorems on equivalence at ∞ and formal reducibility are given.

I. S. Sokolnikoff (Madison).

Thomas, Joseph Miller: Complete differential systems. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **22**, 109—110 (1936).

A complete system S of linear homogeneous partial differential equations of the first order $X_\alpha u = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$) is called nested if every system S_λ ($\lambda = 1, \dots, r$) comprising the first λ equations of S is complete. The author indicates the following simple method to reduce a system $Y_\alpha u = 0$ (1) to nested form in the coefficient ring: Let a be a non-vanishing determinant of order r formed from the coefficients of the Y 's. We obtain an equivalent system in nested form by solving (1) for the corresponding set of r derivatives and by multiplying the resulting equations by a . *O. Borůvka*.

Lijn, G. van der: Sur l'existence de l'intégrale d'une différentielle totale. *Fundam. Math.* **26**, 113—115 (1936).

$P(x, y, z)$ und $Q(x, y, z)$ seien in dem Quader $a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$, $c \leq z \leq C$ meßbar. In demselben Quader sei $\varepsilon(x, y, z)$ positiv und meßbar. Ferner sei $\eta > 0$. Dann gibt es eine in dem Rechteck R ($a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$) stetige und differenzierbare Funktion $z(x, y)$, so daß, abgesehen von einer Punktmenge x, y vom Maß $< \eta \cdot \text{Maß}(R)$

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x} - P(x, y, z(x, y)) \right| < \varepsilon(x, y, z(x, y)),$$

$$\left| \frac{\partial z}{\partial y} - Q(x, y, z(x, y)) \right| < \varepsilon(x, y, z(x, y))$$

ist.

Kamke (Tübingen).

Cheo, Si-Ping: Sur les fonctions satisfaisant aux équations différentielles $D(q) = 0$. Bull. Sci. math., II. s. **60**, 9—11 (1936).

This paper proves the following formal result: if $\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ and $\square X = 0$, $\square Y = 0$, $\square Z = 0$ then $Dq = 0$ where q is the quaternion $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} + i\left(\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + j\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$ and $D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$.

Murnaghan (Baltimore).

Martin, Léopold: Sur des transcendentes de Bessel considérées comme fonctions de Riemann relatives à une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles contenant autant d'équations que de fonctions inconnues de deux variables indépendantes. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **22**, 73—80 (1936).

Der Verf. betrachtet das System von partiellen Differentialgleichungen
(1) $F_k(u) \equiv \partial^2 u^k / \partial x_0 \partial y_0 + \sum_{j=1}^n c_{jk} u^j = 0$ ($j, k = 1, \dots, n$) und das dazu adjungierte
(2) $G_j(v) \equiv \partial^2 v^j / \partial x \partial y + \sum_{k=1}^n c_{jk} v^k = 0$, wobei die c_{jk} konstante Größen bedeuten.

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **11**, 161) hat er gezeigt, daß es n Lösungen ($k = 1, \dots, n$) $R_{jk}(x, y; x_0, y_0)$ des Systems (2) und n Lösungen ($j = 1, \dots, n$) $S_{kj}(x_0, y_0; x, y)$ des Systems (1) gibt, so daß die n^2 Relationen $R_{jk}(x, y; x_0, y_0) = S_{kj}(x_0, y_0; x, y)$ ($j, k = 1, \dots, n$) für je zwei Punkte x_0, y_0 und x, y bestehen. In der vorliegenden Arbeit wird die folgende Entwicklung für die Funktionen R_{jk} (bzw. S_{kj}) abgeleitet:

$$R_{jk}(x, y; x_0, y_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i!)^2} C_{jk}^i (x - x_0)^i (y - y_0)^i.$$

In dieser Formel $C_{jk}^0 = 1$ für $j = k$, $= 0$ für $j \neq k$ und die Koeffizienten C_{jk}^i , für $i \geq 1$, werden durch die Matrizengleichungen $\|C_{jk}^1\| = \|c_{jk}\|$, $\|C_{jk}^i\| = \|C_{jk}^{i-1}\|^2$ bestimmt.

O. Borůvka (Brno).

Oseen, C. W.: Deux généralisations de l'équation des ondes. Ark. Mat. Astron. Fys. **25 A**, Nr 12, 1—8 (1936).

Für die hyperbolischen Differentialgleichungen

$$\left(a^2 + \sum_{k=1}^3 a_k^2 x_k^2\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2c_1 x_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial t} + c_2^2 x_2^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - a^2 \Delta \varphi$$

werden die Grundlösungen explizite angegeben. K. Friedrichs (Braunschweig).

Krzyżański, M.: Sur les évaluations pour une équation du type hyperbolique. Studia Math. **5**, 151—154 (1935).

Die Integralungleichung für die Lösung einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung wird auf den Fall übertragen, daß das Anfangsgebiet ein zeitartiger Kegel ist, auf dem nur die Werte der Lösungsfunktion vorgegeben sind. Friedrichs.

Delsarte, Jean: Sur un problème de diffraction. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 826 bis 828 (1936).

Cauchy's Anfangsproblem der hyperbolischen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad v = v_1 = \text{const für } x > 0, \quad = v_2 = \text{const für } x < 0$$

für eine Funktion $u(x, y, z, t)$ wird auf eine Integralgleichung für $u(0, y, z, t)$ zurückgeführt. Deren Lösung wird explizite angegeben. Der Nachweis soll später erscheinen.

K. Friedrichs (Braunschweig).

Kupradze, V.: Verbreitung der elektromagnetischen Wellen in nichthomogenem Medium. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1**, 7—9 (1936).

In seinen früheren Arbeiten (dies. Zbl. **8**, 209, 313; **9**, 358; **11**, 405) hat der Verf. verallgemeinerte Potentiale einfacher und Doppelschichten für die Lösung einiger

Schwingungsaufgaben eingeführt. Jetzt werden verallgemeinerte Oberflächenpotentiale benutzt, mit deren Hilfe die Verteilung der elektromagnetischen Wellen in einem Medium, in welchem sich eine oder mehrere aufeinanderfolgende Einschließungen vorfinden, studiert wird. Die Lösung der Aufgabe hängt hier von Fredholmschen Gleichungen zweiter Art in Stieltjesschen Integralen ab. *Janczewski* (Leningrad).

Potoček, Jan: Application du principe de Huygens à la théorie de la chaleur. Čas. mat. fys. 65, 171—178 u. franz. Zusammenfassung 178 (1936) [Tschechisch].

Wirtinger, W.: Über eine spezielle Aufgabe der Potentialtheorie. Anz. Akad. Wiss., Wien 1936, 22 (Nr. 3).

Nicolesco, Miron: Recherches sur les fonctions polyharmoniques. Ann. École norm., III. s. 52, 183—220 (1935).

Unter einer polyharmonischen Funktion der Ordnung p wird eine Lösung von $\Delta^p u = 0$ verstanden ($\Delta^{n+1} u = \Delta(\Delta^n u)$, Dimensionszahl beliebig). Im Anschluß an Almansi (vgl. auch dies. Zbl. 10, 114) wird zunächst gezeigt, daß eine solche Funktion in jedem Sternbereich D mit O als Zentrum eindeutig in der Form $u \equiv \sum_0^{p-1} r^{2k} u^{(k)}$

darstellbar ist, wobei die $u^{(k)}$ harmonische Funktionen sind. Sodann werden die beiden Harnackschen Sätze übertragen: Sind die u_n polyharmonisch derselben Ordnung p und konvergieren die Folgen $\{u_n\}$ und $\{\Delta^k u_n\}$, $k = 1, 2, \dots, p-1$, am Rande von D gleichmäßig, so strebt in D $u_n \rightarrow u$, wobei u polyharmonisch der Ordnung p ist. Beim zweiten Harnackschen Satz muß Konvergenz in p inneren Punkten und vollständige Subharmonizität vorausgesetzt werden. Schließlich überträgt Verf. auf polyharmonische Funktionen den „théorème des valeurs moyennes“ für harmonische Funktionen von Favard (J. Math. pures appl. und Thèse Paris 1927). *W. Feller.*

Giraud, Georges: Existence de certaines dérivées des fonctions de Green; conséquences pour les problèmes du type de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 380—382 (1936).

Sei (1) $Fu = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$ ein elliptischer Differentialoperator,

$\|A_{rs}\|$ die zur Matrix der a_{ik} inverse Matrix, $D(\mathcal{E})$ die Determinante von $\|a_{ik}\|$ im Punkte \mathcal{E} mit den Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, X ein Punkt mit den Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_m . Will man eine Fundamentallösung von (1) konstruieren, so geht man nach E. E. Levi von der Funktion $H(X, \mathcal{E})$ des Punktepaares X, \mathcal{E} aus, die für $n \geq 3$ bis auf einen konstanten Faktor mit $\frac{1}{\sqrt{D(\mathcal{E})}} \left[\sum_{r,s=1}^m A_{rs}(\mathcal{E}) (x_r - \xi_r)(x_s - \xi_s) \right]^{\frac{2-m}{2}}$ übereinstimmt. Verf. ersetzt hier überall $a_{ik}(\mathcal{E})$ durch eine Funktion

$$a_{i,k}^*(X, \mathcal{E}) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \mu^3}{4\pi^{m/2}} \int_{XA < X\mathcal{E}}^{(m)} a_{ik}(A) \frac{\overline{XA}^{\mu-m}}{\overline{X\mathcal{E}}^\mu} \log \frac{X\mathcal{E}}{XA} dV_A, \quad (\mu > 3)$$

$X\mathcal{E}$ und $X\mathcal{E}$ usw. bezeichnen Entfernungen der entsprechenden Punkte. Die somit gebildete Funktion $H^*(X, \mathcal{E})$ kann auch zur Konstruktion der Fundamentallösungen und Greenschen Funktionen dienen. Die neue Greensche Funktion besitzt dann, falls die a_{ik} Hölderbedingungen genügen, gewisse Ableitungen, insbesondere am Rande, was für die alte Fundamentallösung dieser Art nicht beweisbar war. Daraus werden Folgerungen für das Dirichletsche Problem gezogen. *Schauder* (Lwów).

Spezielle Funktionen:

Costello, J. C.: Bessel product functions. Philos. Mag., VII. s. 21, 308—318 (1936).

Verf. behandelt die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art, ganzzahliger Ordnung, deren Argument die positive oder negative Quadratwurzel aus der imaginären

Einheit als Faktor enthält. Solche Funktionen der Ordnung 0 bzw. 1 sind bereits vielfach verwendet worden. In vorliegender Arbeit werden die Funktionen höherer Ordnung betrachtet, wobei das Hauptziel ist, zu Formeln zu gelangen, welche eine einfache Berechnung ermöglichen. Nach einer Aufzählung der Reihen für die reellen und imaginären Teile der Funktionen mit Ordnungszahl 0, erster und zweiter Art, betrachtet Verf. gewisse Produkte dieser reellen und imaginären Teile und ihrer Ableitungen untereinander. Hierauf erwähnt er die verschiedenen rekurrenten Beziehungen, welche zwischen den Produktfunktionen verschiedener Ordnung und ihren Ableitungen bestehen. Auch die Differentialgleichungen für die verschiedenen Produktfunktionen werden angeführt. Endlich berechnet er für diese Produktfunktionen die verschiedenen aufsteigenden sowie die asymptotischen Reihenausdrücke. *Strutt.*

Meijer, C. S.: Neue Integraldarstellungen aus der Theorie der Whittakerschen und Hankelschen Funktionen. Math. Ann. 112, 469—489 (1936).

Der Verf. beweist: Satz 1:

Für n ganz ≥ 2 , $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, $r_j \neq 0, -1, -2, \dots$, ($j = 1, 2, \dots, n-2$).

$$a_j \neq 0, -1, -2, \dots \quad (j = 1, 2, \dots, n+1)$$

$$a_j - a_h \quad \text{nicht ganz} \quad \left(\begin{matrix} j = 1, 2, \dots, n+1 \\ h = 1, 2, \dots, n+1 \quad j \neq h \end{matrix} \right)$$

gilt

$$\sum_{h=1}^{n+1} \frac{\prod_{j \neq h}^{n+1} \Gamma(a_j - a_h)}{\Gamma(1 - a_h) \cdot \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(r_j - a_h)} z^{2a_h} \times {}_{n-1}F_n \left[\begin{matrix} a_h, 1 + a_h - r_1, \dots, 1 + a_h - r_{n-2}; \\ 1 + a_h - a_1, \dots, 1 + a_h - a_{n+1} \end{matrix}; z^2 \right] =$$

$$= - \frac{2 z^{\alpha+\beta} \prod_{j=1}^{n+1} \Gamma(a_j)}{\pi i \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(r_j)} \times \int_0^{(1+)} v^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2zv) {}_{n+1}F_n \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_{n+1}; \\ r_1, \dots, r_{n-2}, \alpha, \beta \end{matrix}; v^2 \right] dv$$

α und β sind beliebig; $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$ — Der Stern in der unteren Zeile der ersten verallgemeinerten hypergeometrischen Reihe bedeutet, daß die Zahl $1 + a_h - a_h$ in der Reihe $1 + a_h - a_1, \dots, 1 + a_h - a_{n+1}$ nicht vorkommt.

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\nu \pi i}{2}} H_\nu^{(1)}(z \cdot e^{\frac{\pi i}{2}}).$$

In Satz 2 werden als Spezialfälle von Satz 1 6 Integralausdrücke für die Whittakerschen Funktionen $W_{k,m}(z)$, die Produkte $W_{k,m}(z) \cdot W_{-k,m}(z)$ und die Produkte $K_\nu(z) K_\mu(z)$ abgeleitet, z. B.:

$$W_{k,m}(z) \cdot W_{-k,m}(z) = - \frac{z^{\alpha+\beta+2k} \Gamma(\frac{1}{2} - k + m) \Gamma(\frac{1}{2} - k - m)}{\pi i \cdot 2^{\alpha+\beta-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^{(1+)} v^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(zv) \times$$

$$\times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} - k + m, \frac{1}{2} - k - m, \frac{1}{2} - k, 1 - k; \\ 1 - 2k, \alpha, \beta \end{matrix}; v^2 \right] dv \quad k \pm m \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

Von den etwa 50 Integralausdrücken, welche für diese Funktionen hauptsächlich als Spezialfälle von Satz 1 gefunden werden, heben wir noch besonders hervor:

$$W_{k,m}(z) = \frac{z}{2} \int_1^\infty e^{-\frac{zt}{2}} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{\frac{k}{2}} P_{m-\frac{1}{2}}^k(t) dt; \quad \Re(k) < 1$$

und

$$W_{k,m}(z) = \frac{z}{4i \cos \pi} \int_{-\infty}^{(-1+)} e^{\frac{zv}{2}} \left(\frac{v-1}{v+1} \right)^{\frac{k}{2}} P_{m-\frac{1}{2}}^k(v) dv \quad m - \frac{1}{2} \text{ nicht ganz.}$$

S. C. van Veen (Dordrecht).

Meijer, C. S.: Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte. Nieuw Arch. Wiskde 18, 10—39 (1936).

Der Verf. betrachtet die Funktion:

$$G_{p,q}^{m,n} \left(\zeta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_h)} \zeta^{b_h} \times \\ \times {}_pF_{q-1} \left[\begin{matrix} 1 + b_h - a_1, \dots, 1 + b_h - a_p; \\ 1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_q; \end{matrix} (-1)^{m+n+p} \zeta \right],$$

$\zeta \neq 0$, $1 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p \leq q-1$; $b_j - b_h$ nicht ganz, $j \neq h \left\{ \begin{matrix} j=1, \dots, m \\ h=1, \dots, m \end{matrix} \right\}$,
 $a_j - b_h \neq 1, 2, 3, \dots \left(\begin{matrix} j=1, \dots, n \\ h=1, \dots, m \end{matrix} \right)$.

(Siehe dies. Zbl. 12, 167 u. vorsteh. Ref.) — Es werden 8 Integralsätze für diese Funktion abgeleitet, z. B.: Satz I

$$G_{2,4}^{4,0} \left(\zeta \left| \begin{matrix} a, \alpha \\ b, c, \beta, \gamma \end{matrix} \right. \right) = \int_0^{\infty} G_{1,2}^{2,0}(u \left| \begin{matrix} a \\ b, c \end{matrix} \right.) G_{1,2}^{2,0} \left(\frac{\zeta}{u} \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta, \gamma \end{matrix} \right. \right) \frac{du}{u},$$

$$|\arg \zeta| < \pi, \quad \text{Max} \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} + \arg \zeta \right) < \tau < \text{Min} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arg \zeta \right)$$

und Satz IV

$$G_{0,4}^{m,0}(\zeta | b_1, b_2, b_3, b_4) = 2 \int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(2u) G_{2,4}^{m,1} \left(\frac{\zeta}{u^2} \left| \begin{matrix} \beta, \alpha \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix} \right. \right) u^{\alpha+\beta-1} du,$$

$$m = 2, 3, 4; \quad |\arg \zeta| \leq (m-2)\pi, \quad \Re(\beta - \alpha) < 1, \quad \Re(\alpha + \beta - 2b_j) < \frac{3}{2} \quad (j=1, \dots, m), \\ \Re(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - 3\alpha - \beta) < \frac{3}{2}.$$

Durch Spezialisierung ergeben sich hieraus zahlreiche Ausdrücke für Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte. — Diese Ergebnisse werden weiter angewandt auf die Struveschen Funktionen [dies. Zbl. 12, 211 (1935)]. S. C. van Veen.

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Gantmakher, F.: Sur les noyaux de Kellogg non symétriques. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 3—5 (1936).

Pour la définition des noyaux symétriques de Kellogg et ses applications v. les travaux de M. Krein (ce Zbl. 12, 168, 407). En prolongeant ces travaux l'auteur démontre que les noyaux non symétriques qui satisfont aux conditions de Kellogg sont symétrisables et que les résultats principaux de Kellogg subsistent dans ce cas général. On obtient ainsi par ex. les propriétés oscillatoires des fonctions fondamentales qui ne sont ainsi liées à la symétrie du noyau. Il est à remarquer que les théorèmes d'oscillation pour quelques équations (différentielles) qui ne sont pas autoadjoints étaient connus déjà de Liouville, mais dans les théorèmes de l'auteur nous avons un moyen pour obtenir des résultats généraux sur ce sujet. Janczewski (Leningrad).

Scorza Dragoni, Giuseppe: Un teorema sulle equazioni integrali non lineari. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 1—5 (1936).

Die nichtlineare Integralgleichung $\varphi(x) - \int_a^b k(x, y) f[y, \varphi(y)] dy = g(x)$ ist eindeutig lösbar, falls das stetige $k(x, y)$ symmetrisch ist und die Ableitung $f_u(y, u)$ der Bedingung $\mu < \beta < f_u < \alpha < \lambda$ genügt, unter λ bzw. μ den ersten positiven bzw. negativen Eigenwert verstanden, der dem indefiniten Kerne $k(x, y)$ entspricht.

Schauder (Lwów).

Pérès, Joseph: Sur l'équation de Volterra singulière. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 5, 73—88 (1936).

The Volterra integral equation considered is of the first kind, $\int_0^y \varphi(x) k(x, y) dx = h(y)$,

the solution of which is usually reduced to that of $k(y, y) \varphi(y) + \int_0^y \varphi(x) k_y(x, y) dx = h'(y)$

singularities being due to the zeros of $k(y, y)$. In this paper $k(y, y)$ is assumed to vanish only at $y = 0$ of order n . — The author derives and completes results on the solution of this equation found by Volterra [Atti Accad. Sci. Torino 31 (1896)], Holmgren [ibid. 35, 570—580 (1900)] and Lalesco [J. Math. pures appl. (6) 4, 125—202 (1908)], by the elegant use of permutable functions. The derivation hinges on the fact that

if $k(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i}$ then $k_y(x, y)/k(y, y)$ is of the form $\varphi(x/y)/y$, and functions of this form constitute a permutable class. Further that in the general case

$k_y(x, y)/k(y, y) = \sum_{i=0}^n b_i x^i / y^{i+1} + M(x, y)$, where $M(x, y)$ is bounded in the domain considered. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Taylor, A. E.: The Hilbert space postulates, a further reduction. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 847—848 (1935).

The reduced set of postulates, if K is a class of elements and A is the set of real or complex numbers, is: (1) K is non vacuous; if $x, y, z \in K$ and $a \in A$, then (2) $x + y \in K$, (3) $ax \in K$, (4) $[x, y] \in A$, (5) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$, (6) $[x, y] = [y, x]$, (7) $[ax, y] = a[x, y]$, (8) $[x, x] \geq 0$, (9) K is not finite dimensional, (10) K is separable and (11) complete relative to $\|x\| = [x, x]^{1/2}$. To these are added the definition of equality: $x = y$ if and only if $[x + (-1)y, x + (-1)y] = 0$. The usual postulates for general Hilbert space are then deducible. The first eight postulates are independent.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Kantorovič, L.: Sur quelques méthodes particulières de prolongement de l'espace de Hilbert. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 171—175 (1935).

En utilisant sa méthode générale [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 123—126 (1935); ce Zbl. 13, 168] l'auteur obtient comme des prolongements de l'espace de Hilbert divers espaces linéaires topologiques, parmi eux l'espace de toutes les suites de nombres complexes avec la convergence faible. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Nathan, D. S.: One-parameter groups of transformations in abstract vector spaces. Duke math. J. 1, 518—526 (1935).

By general theory, the differential equation $df/dt = Tf$ in Banach space, where T is an operator satisfying the Lipschitz condition $|Tf - Tg| \leq C|f - g|$, defines a continuous group-germ of operators A_t with T as generator and t as canonical parameter. In case T is bounded and linear, the operators A_t are bounded and linear, are defined for all real t , and constitute a group. The author shows in this case that $A_t = \exp tT$, where the exponential function is defined by the usual power series. By investigating the properties of the formal power series for $\ln(1 + S)$, where S is a linear operator with bound less than 1, he establishes the inversion formula $T = \ln(A_t/t)$; and further shows that this formula defines the generator of an arbitrary continuous group-germ of bounded linear operators A_t under the obvious conditions imposed by the method. He closes with the remark that these conditions are satisfied in the case of unitary groups $\exp iH$, where H is bounded and self-adjoint, in Hilbert space.

M. H. Stone (Cambridge, Mass.).

Ballantine, J. P.: A new proof of the equivalence of E. H. Moore. Bull. Amer. math. Soc. 41, 853—856 (1935).

The equivalence in question is the statement that in a quasi-field (a field in which Multiplication is not necessarily commutative) the existence of a solution of the system

of equations $\sum_{p'} \alpha(p', p'') \xi(p'') = \eta(p')$, p' and p'' on a finite range, is equivalent to the proposition: for every vector $\gamma(p')$ such that $\sum_{p'} \gamma(p') \alpha(p' p'') = 0(p'')$, it is true that $\sum_{p'} \gamma(p') \eta(p') = 0$. The author gives a proof in which he does not use the postulate that if for a given vector $\sum_{p'} \alpha(p') \bar{\alpha}(p') = 0$ then $\alpha(p') = 0(p')$, presumably used by Moore. The proof given by Moore in General Analysis [Mem. Amer. Phil. Soc. 1, 72 (1935)] does not use this postulate either. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Fichtenholz, Gr.: Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 26—33 (1936).

F. Riesz gab seinerseits notwendige und hinreichende Bedingungen für die schwache Konvergenz einer Folge von linearen Funktionalen $f_n(x) = \int_0^1 x(t) d\alpha_n(t)$ gegen ein lineares Funktional $f_0(x) = \int_0^1 x(t) d\alpha_0(t)$ im Raume der stetigen Funktionen $x(t)$ in $0 \leq t \leq 1$ an. Hier bedeuten $\alpha_n(t)$, $\alpha_0(t)$ Funktionen von beschränkter Schwankung, wobei $\alpha_n(0) = \alpha_0(0) = 0$. Diese Bedingungen lauten (1) $\text{Var}_{0 \leq t \leq 1} \alpha_n(t) \leq K$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1) = \alpha_0(1)$; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \alpha_n(t) dt = \int_0^1 \alpha_0(t) dt$. Der Verf. ersetzt nun Bedingung (3) durch die folgende: (3̄) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(t) = \alpha_0(t)$ in $0 \leq t \leq 1$. Daraus bekommt man als Anwendung die allgemeine Form einer linearen Operation $U(x) = \int_0^1 x(t) d_t \alpha(t, s)$, welche stetige $x(t)$ in stetige $y(s)$ überführt. Die Bedingungen dafür bestehen in: (1) $\text{Var}_{0 \leq t \leq 1} \alpha(t, s) \leq K$; (2) $\alpha(0, s) = 0$ und $\alpha(1, s)$ stetig in s ; (3) $\alpha(t, s)$ asymptotisch stetig in s , d. h. $\lim_{s_n \rightarrow s_0} \alpha(t, s_n) = \alpha(t, s_0)$.

Als Folgerung bekommt man ein Ergebnis von A. Fouillade über positive Funktionaloperationen (dies. Zbl. 9, 214). *Schauder* (Lwów).

Mazur, S., und W. Orlicz: Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen. Studia Math. 5, 50—68. II. Mitt. 179—189 (1935).

Seien X und Y Räume vom Typus F (vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, p. 35). Eine nicht identisch verschwindende Operation $U(x) = y$, welche X in Y abbildet, heißt ein homogenes Polynom k -ten Grades, wenn es eine in jeder Veränderlichen lineare (d. h. additive und stetige) Operation $U'(x_1, x_2, \dots, x_k)$ gibt, so daß $U(x) = U'(x, x, \dots, x)$ ist. Eine Operation $U(x) = y$ soll ein Polynom m -ten Grades heißen, wenn $U(x) = U_0(x) + U_1(x) + \dots + U_m(x)$ ist, wobei die Operation $U_k(x)$ entweder identisch verschwindet oder ein homogenes Polynom k -ten Grades ist und $U_m(x)$ nicht identisch verschwindet. Es sei jetzt $\Delta U(x) = U(x + h) - U(x)$ und $\Delta^{k+1} U(x) = \Delta(\Delta^k U(x))$ gesetzt. Dann gilt der Satz: Damit die Operation $U(x)$ ein Polynom höchstens m -ten Grades sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\Delta^{m+1} U(x) = 0$ für jedes h sei. Eine andere Kennzeichnung von Polynomen ist die folgende: Eine Operation $U(x)$ ist dann und nur dann ein Polynom höchstens m -ten Grades, wenn man für je zwei feste Elemente x und h Elemente y_0, y_1, \dots, y_m aus Y finden kann, so daß für reelle t $U(x + th) = y_0 + ty_1 + \dots + t^m y_m$ gilt. Analoge Definitionen und Sätze werden auch für Polynome in mehreren Veränderlichen gegeben. Die zweite Mitteilung ist im wesentlichen verschiedenen Konvergenzsätzen gewidmet. Insbesondere gilt folgendes: 1. Der Limes einer konvergenten Folge von Polynomen höchstens m -ten Grades ist ein Polynom höchstens m -ten Grades. 2. Ist die Folge von Polynomen höchstens m -ten Grades auf einer Menge gleichmäßig beschränkt, so ist sie auf dieser Menge auch gleichmäßig stetig.

3. Ist der Raum X separabel, so gibt es in jeder beschränkten Folge von Polynomen höchstens m -ten Grades eine konvergente Teilfolge. — Wenn man als Ausgangspunkt statt linearer Operationen additive (also nicht notwendig stetige) Operationen wählt, so erhält man statt Polynome Operationen m -ten Grades. Mehrere Sätze über Polynome lassen sich auch auf den Fall der Operationen m -ten Grades verallgemeinern. Ist eine Operation m -ten Grades mindestens in einem Punkte beschränkt, so ist sie ein Polynom.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Orlicz, W.: Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen. *Studia Math.* 5, 127—140 (1935).

Es sei $\{f_{nm}(\xi, \tau)\}$ eine Doppelfolge von Operationen, welche linear nach ξ und stetig nach τ sind. Es sei weiter R die Menge von Paaren (ξ, τ) , für welche der iterierte Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f_{nm}(\xi, \tau)$ nicht existiert. Verf. beweist: Wenn es für jedes τ ein ξ_τ

mit $(\xi_\tau, \tau) \in R$ gibt, so ist die Menge R so beschaffen, daß — außerhalb einer ξ -Menge erster Kategorie — die jedem ξ entsprechenden τ mit $(\xi, \tau) \in R$ eine τ -Menge zweiter Kategorie bilden. Dieser Satz findet einige Anwendungen in der Theorie der Orthogonalentwicklungen. Es wird insbesondere bewiesen, daß es keine Toeplitzsche Summationsmethode und kein vollständiges Orthogonalsystem gibt, für welche eine beliebige Reihe mit endlicher Summe von Koeffizientenquadraten in allen Punkten summierbar ist.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Orlicz, W.: Über Folgen linearer Operationen, die von einem Parameter abhängen. *Studia Math.* 5, 160—170 (1935).

Es sei L^M der Raum aller Funktionen $f(x)$ mit $\int_a^b M(|f(x)|) dx < +\infty$. Wenn die Funktion $M(\xi)$ gewissen Bedingungen genügt, so kann man beweisen, daß L^M mit dem Normbegriff $\|f(x)\| = M^{-1} \int_a^b M(|f(x)|) dx$ einen Banachschen Raum bildet

(vgl. Z. W. Birnbaum und W. Orlicz, dies. Zbl. 3, 252; W. Orlicz, dies. Zbl. 6, 315). Unter den Bedingungen des Verf. umfaßt jeder L^M den Raum L^1 aller in erster Potenz summierbaren Funktionen, der letzte Raum umfaßt bekanntlich den Raum L^∞ aller wesentlich beschränkten Funktionen. Es sei jetzt $W(f)$ eine lineare Operation, welche L^∞ in L^∞ stetig im Sinne des Raumes L^∞ abbildet, und $U(f)$ eine lineare Fortsetzung von $W(f)$ auf L^1 , welche L^1 in L^1 stetig im Sinne des L^1 abbildet. Dann gibt es eine Fortsetzung $V(f)$ von $U(f)$, welche in L^M definiert und stetig ist und L^M in L^M abbildet. Dieser Satz gestattet einige Anwendungen in der Theorie der Orthogonalentwicklungen.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Funktionentheorie:

Hamdi-Alisbah, Orhan: Das Koeffizientenproblem der analytischen Funktionen mit beschränkter Schwankung. *Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin* 3, 49—66 (1936).

Eine für $|z| < R$ reguläre Potenzreihe $f(\zeta) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \zeta^\kappa$ heißt dort „von beschränkter Schwankung“, wenn dort $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq 2 m_R$ gilt. Eine einfache Überlegung zeigt,

daß damit gleichwertig ist, daß alle Potenzreihen $s(\varphi, z) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \sin \kappa \varphi \cdot z^\kappa$ für $|z| < R$

und alle φ der Beschränkung $|s(\varphi, z)| \leq m_R$ genügen. Damit ist aber der Anschluß an die bekannte Theorie der beschränkten Potenzreihen vollzogen. Verf. gewinnt

nun zunächst aus dem Schwarzschen Lemma die Ungleichung $m_r \leq m_R \cdot \frac{r}{R}$ für $r \leq R$,

ferner die Ungleichung $\sum_{\kappa=1}^{\infty} |a_\kappa|^2 \sin^2 \kappa \varphi R^{2\kappa} \leq m_R^2$ und insbesondere $|a_\kappa| \leq \frac{m_R}{R^\kappa}$ [vgl.

Poukka, Über die größte Schwankung einer analyt. Funktion in einem Kreise. *Arch. Math. Phys.* (3) 12, 251—254 (1907)]. Er kann aber auch weiterhin im Anschluß an die bekannten Ergebnisse von Carathéodory [*Math. Ann.* 64, 95—115 (1907)]

und Schur [J. reine angew. Math. **147**, 205—233 (1917)] den genauen Variabilitätsbereich der Koeffizienten a_n beschreiben. Rogosinski (Königsberg i. Pr.).

Valiron, G.: Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre inférieur à un. *Mathematica, Cluj* **11**, 264—269 (1935).

Verf. benutzt eine von Denjoy (C. R. Acad. Sci., Paris **193**; dies. Zbl. **3**, 161) zum Beweis des Wimanischen Satzes entwickelte Methode und gibt mit ihrer Hilfe eine neue Herleitung seiner Ungleichungen

$$\log \mu(r, f) > (\pi \varrho \operatorname{ctg} \pi \varrho - \varepsilon) N(r, f), \quad \text{wobei} \quad \mu(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{ist,}$$

und

$$N(r, f) > \left(\frac{\sin \pi \varrho}{\pi \varrho} - \varepsilon \right) \log M(r, f) > r^{2-\varepsilon},$$

die für ganze Funktionen einer Ordnung < 1 bestehen, sobald r geeignete große Werte annimmt. Dazu können zusätzliche Aussagen über die Dichte der betreffenden r -Werte gewonnen werden, die an die Ergebnisse heranreichen, welche zuerst Besicovitch für die verwandte Ungleichung $\log \mu(r, f) > (\cos \pi \varrho - \varepsilon) \log M(r, f)$ gefunden hat [Math. Ann. **97** (1927)]. Ullrich (Gießen).

Cartwright, M. L.: Some uniqueness theorems. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **41**, 33—47 (1936).

L'auteur démontre ce théorème: I. Supposons que $\Psi(z) = \sum_0^\infty a_n z^{-n}$, $\Phi(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ soient holomorphes respectivement pour $|z| > 1$ et $|z| < 1$ et soient d'ordre fini (au sens de Borel) lorsque $r = |z|$ tend vers 1 respectivement par valeurs supérieures et inférieures à 1. Supposons que

$$\lim_{r \downarrow 1} \int_\alpha^\beta |\Psi(re^{i\theta})| d\theta < \infty, \quad \lim_{r \uparrow 1} \int_\alpha^\beta |\Phi(re^{i\theta})| d\theta < \infty, \quad \lim_{r \uparrow 1} \int_\alpha^\beta \left| \Psi\left(\frac{e^{i\theta}}{r}\right) - \Phi(re^{i\theta}) \right| d\theta = 0,$$

$\alpha < \beta$ et que $\log |a_n| \leq -\gamma(n)$ (*) pour un ensemble de n de densité inférieure $d > 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi}$, $\gamma(n)$ étant une fonction non décroissante telle que $\sum_1^\infty \gamma(n) n^{-2}$ diverge.

Dans ces conditions $\Phi(z) = \Psi(z) \equiv a_0 = b_0$. Cette proposition est liée à des théorèmes de Levinson (*Proc. London Math. Soc.*, en cours de publication) et de Mandelbrojt (Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, Paris 1935; voir ce Zbl. **13**, 110), elle se déduit de th. sur les fonctions entières notamment du suivant: II. Une fonction entière $F(z)$ est identiquement nulle si $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r} = k < \pi$, $M(r) = \max_\theta |F(re^{i\theta})|$ pour $0 \leq \theta < 2\pi$, si $\log |F(in)| < -\gamma(n)$ (**) pour un ensemble de n de densité inférieure $d > \frac{k}{\pi}$ et si pour $|x| \leq 1$, $y > 0$, $\log |F(x \pm iy)| < \chi(y)$ où $\chi(y)$ est non

décroissante et $\int_1^\infty \chi(y) y^{-2} dy < \infty$ (comparer Levinson, ce Zbl. **12**, 213, et Cartwright, ce Zbl. **12**, 171). La densité inférieure d (Pólya, *Math. Z.* **1929**) est définie par $d = \lim_{\xi \uparrow 1} \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r) - N(r\xi)}{r(1-\xi)} \right)$, $N(r)$ étant le nombre des n inférieurs à r vérifiant (*) ou (**). Dans I, on peut supprimer la condition relative à l'ordre des fonctions si l'on remplace (*) par $\log |a_n| \leq -\tau n$, inégalité valable pour des n de densité supérieure $D > 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi}$. Alors, on utilise à la place de II des propositions déduites de théorèmes antérieurs de l'auteur (ce Zbl. **11**, 311). G. Valiron (Paris).

Dinghas, Alexander: Zur Theorie der meromorphen Funktionen in einem Winkelraum. *S.-B. preuß. Akad. Wiss.* **1935**, 576—596.

Für eine analytische Funktion von der im Titel genannten Eigenschaft läßt sich mittels der Randwerte des absoluten Betrages, der Pole und der Nullstellen eine Normaldarstellung aufstellen, die als ein Gegenstück zu der klassischen Weierstrass-

schen kanonischen Darstellung einer ganzen oder meromorphen Funktion betrachtet werden kann [R. Nevanlinna, Acta Soc. Sci. Fennicae 50, Nr 5 (1925)]. Es wird gezeigt, daß diese Darstellung sowie gewisse andere Sätze über meromorphe Funktionen in einem Winkelraum sich einfach als Folgerungen einer Formel ergeben, welche den Wert einer in einem Kreissektor regulären analytischen Funktion mit Hilfe der Randwerte des Realteils derselben Funktion bestimmt. *R. Nevanlinna* (Helsinki).

Miniatoŭ, A.: Zum Interpolationsproblem bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 243—245 (1935).

In einem Bereiche \mathfrak{B} des Raumes der komplexen Veränderlichen z_1, \dots, z_n (\mathfrak{B} sei beschränkt bzw. analytisch auf einen solchen Bereich abbildbar) sei eine abzählbare Punktmenge P_v gegeben. Unter Benutzung der Methoden und Ergebnisse von Stefan Bergmann wird untersucht, wann es eine in \mathfrak{B} reguläre Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$ gibt, die in den Punkten P_v vorgegebene Werte annimmt. Notwendig und hinreichend dafür ist die Konvergenz von $\sum |c_n|^2$, wo die c_n Koeffizienten einer Interpolationsreihe von $f(z_1, \dots, z_n)$ sind, die nach gewissen Orthogonalfunktionen fortschreitet. — Bemerkungen über die Eindeutigkeit von $f(z_1, \dots, z_n)$ (und damit der „Vollständigkeit“ der P_v) schließen sich an.

Behnke (Münster i. W.).

Behnke, H., und E. Peschl: Die analytischen Abbildungen von Bereichen auf sich im Raume zweier komplexer Veränderlichen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 45, 243—256 (1935).

Dieser Bericht gibt eine interessante, systematische Zusammenfassung aller Ergebnisse der verschiedensten Verfasser über die „Automorphismen“ der Bereiche (d. h. der eineindeutigen analytischen Abbildungen auf sich) im Raume R_4 der beiden komplexen Veränderlichen w, z . Da zwei aufeinander analytisch abbildbare Bereiche isomorphe Automorphismengruppen besitzen, gibt uns die Kenntnis der Automorphismen zugleich ein wichtiges notwendiges Kriterium für die Abbildbarkeit bzw. Nichtabbildbarkeit der Bereiche untereinander. So sind z. B. der Dizylinder $|w| < 1, |z| < 1$ und die Hyperkugel $|w|^2 + |z|^2 < 1$ — obwohl beide von einfachem Zusammenhang — analytisch nicht aufeinander abbildbar, da ihre Automorphismengruppen nicht isomorph sind (während in der gewöhnlichen Funktionentheorie einfach zusammenhängende Bereiche der z -Ebene sich sämtlich untereinander abbilden lassen). In der Untersuchung der Automorphismen kann man sich auf die Regularitätsbereiche (genaue Existenzbereiche analytischer Funktionen) beschränken, da jeder Automorphismus eines Nichtregularitätsbereiches zugleich ein solcher des kleinsten ihn umfassenden Regularitätsbereiches (der Regularitätshülle) ist. Es kommt nun darauf an, die Regularitätsbereiche nach ihren Automorphismengruppen zu klassifizieren. Dies wird zunächst für die beschränkten Bereiche durchgeführt, die in folgende Klassen zerfallen bzw. sich auf Bereiche dieser Klassen abbilden lassen: 1. Hyperkugel und Dizylinder mit 8- bzw. 6parametriger Automorphismengruppe; 2a) die Körper: $|w|^\alpha + |z|^2 < 1$ und $|w|^2 + |z|^\alpha < 1$ ($0 < \alpha \neq 2$) mit 4parametriger Gruppe; 2b) die übrigen eigentlichen Reinhardtischen Körper (außer 1 und 2a) mit der 2parametrigen Gruppe $w = we^{i\vartheta}, z = ze^{i\varphi}$ (ϑ beliebig reell); 3. die (m, p) -Bereiche, die mit einigen wohlbestimmten Ausnahmen die 1parametrige Gruppe $w = we^{im\vartheta}, z = ze^{ip\vartheta}$ besitzen; 4. Bereiche mit kontinuierlichen Gruppen ohne Fixpunkte unendlicher Ordnung; 5. Bereiche mit nur diskontinuierlichen Automorphismengruppen; 6. die starren Bereiche (d. h. die keinen von der Identität verschiedenen Automorphismus zulassen); die ersten Regularitätsbereiche dieser Art wurden von Behnke-Peschl angegeben (Mh. Math. Phys. 1936). Nun ist zunächst klar, daß man zwei Bereiche, die nicht zur gleichen Klasse gehören, sicher nicht aufeinander abbilden kann. Aber auch zwei zu derselben Klasse gehörige Bereiche sind im allgemeinen nicht aufeinander abbildbar. Es muß daher versucht werden, in jeder Klasse ein vollständiges System von „Repräsentantenbereichen“ aufzustellen, auf die sich alle übrigen Bereiche abbilden lassen, die aber selbst nicht untereinander abbildbar sind. Für die

Klassen 1—4 ist dies leicht durchzuführen (z. B. zwei normierte verschiedene Reinhardtsche Körper sind nicht aufeinander abbildbar, so daß also die Gesamtheit der normierten Reinhardtschen Körper ein vollständiges System von Repräsentantenbereichen der Klassen 1 und 2 bildet. Ähnliches gilt für die Klassen 3 und 4). Dagegen ist bisher noch nichts über die Repräsentantenbereiche der Klassen 5 und 6 bekannt. — Will man die gleichen Überlegungen auch für nichtbeschränkte Bereiche durchführen, so stößt man auf eine besondere Schwierigkeit: Der Cartan-Carathéodorysche Eindeigkeitssatz, auf den sich die Untersuchung der beschränkten Bereiche im wesentlichen stützt, gilt im allgemeinen nicht mehr für unbeschränkte Bereiche. So sind die entsprechenden Untersuchungen erst für Reinhardtsche Körper und Kreiskörper durchgeführt (vgl. Behnke-Peschl, Math. Ann. **112**, bzw. Zumbusch, Diss. Münster 1936, M. Z. **41**). [Literatur zum Vorhergehenden, soweit nicht näher angegeben, s. Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehr. kompl. Verändl. Erg. Math. u. Grenzgeb. **3**, 3 (1934).] Thullen (Quito, Südamerika).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Lévy, Paul: *Intégrales à éléments aléatoires indépendants et lois stables à n variables*. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 543—545 (1936).

Une loi de distribution dans l'espace vectoriel à n dimensions est dite stable si, U' et U'' étant choisis d'après cette loi indépendamment l'un de l'autre, a' et a'' étant deux nombres positifs quelconques, il existe un nombre positif a tel que $(a'U' + a''U'') : a$ dépende de la même loi. L'auteur trouve la forme générale d'une loi stable arbitraire. Ce résultat est intimement lié avec l'extension, pour l'espace à n dimensions, de la théorie des intégrales à éléments aléatoires; cette extension est brièvement indiquée au commencement de la Note. A. Kolmogoroff (Moskau).

Cramér, Harald: *Sur une propriété de la loi de Gauss*. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 615—616 (1936).

Beweis des folgenden, von P. Lévy wiederholt als Vermutung ausgesprochenen Satzes: Wenn zwei Verteilungsfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ bei ihrer Faltung die Gaußsche Normalfunktion $\Phi(x)$ ergeben, so sind sie von der Form $F_i(x) = \Phi\left(\frac{x - m_i}{a_i}\right)$ mit $m_1 + m_2 = 0$, $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Satz und Beweis gelten auch in mehreren Dimensionen. W. Feller (Stockholm).

Batiele, Edgar: *Le problème des rencontres*. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 724—726 (1936).

Verf. leitet in Anlehnung an ein von ihm vorher behandeltes Problem (vgl. dies. Zbl. **7**, 124) eine bekannte und bereits einfacher bewiesene Formel über das „Rencontrespiel“ ab (siehe z. B. Czuber, W.-Rechnung I, S. 37) und betrachtet weiter den verallgemeinerten Fall der bei zwei Anordnungen von je $n\mu$ Gegenständen auftretenden Koinzidenzen, wo die Merkmale 1 bis n je μ mal wiederholt sind. Als Beispiel wird der Fall zweier Kartenspiele betrachtet, wenn von der Farbe der Karte abgesehen wird. Bruno de Finetti (Trieste).

Gotaas, Per: *Formules de récurrence pour les semi-invariants à quelques lois de distribution à plusieurs variables*. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 619—621 (1936).

Verallgemeinerung einer Rekursionsformel von Qvale, C. R. Acad. Sci., Paris **194** (1932); dies. Zbl. **3**, 267. W. Feller (Stockholm).

Aitken, A. C., and H. T. Gonin: *On fourfold sampling with and without replacement*. Proc. roy. Soc. Edinburgh **55**, 114—125 (1935).

In fourfold sampling in which each drawing may be classified as a “success” or a “failure” with respect to each of two different attributes, let x and y be the number of successes of the first and second kinds respectively obtained in n drawings. Before considering the bivariate distribution function for x and y , the author develops orthogonal polynomials associated with the univariate distribution functions. Those

for sampling with replacements are a generalization of those of J. P. Gram [J. f. Math. 66, 41—73 (1882)] and H. E. H. Greenleaf (see this Zbl. 5, 359) being appropriate to $(p+q)^n$ instead of $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^n$. For sampling without replacements (the hypergeometric case) the polynomials seem to be new. Then by use of factorial moment generating functions, it is demonstrated that the bivariate distribution functions, for fourfold sampling with or without replacements, can each be expressed as the product of the corresponding univariate distribution functions multiplied by a terminating series bilinear in the orthogonal polynomials appropriate. C. C. Craig (Ann Arbor.)

Münzner, H., und K. Löer: Die Invarianz des Deckungskapitals gegenüber Sterblichkeitsänderungen. Arch. math. Wirtsch. u. Sozialforschg 2, 1—7 (1936).

Es wird ein Beweis dafür gegeben, daß es bei kontinuierlicher Rechnungsweise für die lebenslängliche Todesfallversicherung zu jeder Sterbetafel eine einparametrische Schar von Sterbetafeln gibt, gegenüber der die Reserven invariant sind. Auch für die gemischte Versicherung wird ein analoges Ergebnis abgeleitet mit der beschränkenden Bedingung, daß das Endalter dieser Sterbegesetze mit dem Ablaufsalter der Versicherung zusammenfällt. Dadurch werden die Ergebnisse, die Dumas (Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 23 und J. Inst. Actuar. 62; dies. Zbl. 2, 203) in seinen Arbeiten abgeleitet hat, ergänzt. Janko (Praha).

Del Vecchio, Ettore: Sul premio naturale. Studi in onore Salvatore Ortu Carboni 99—108 (1935).

Bedeutet x das Alter, t die Dauer eines Versicherungsvertrages, s die Dauer des Aufschubes, z den Augenblick, der in Untersuchung gezogen wird, so werde die natürliche Prämie für das Intervall $(z, z+dz)$ mit $P(x, t, s, z) dz$ bezeichnet, die Einmalprämie sei $A(x, t, s)$; der Verzinsungskoeffizient sei $\varrho(\tau)$ und $\varphi(u) = \int_0^u \varrho(\tau) d\tau$; dann genügt P der Gleichung

$$\int_0^z P(x, t, s, u) {}_u p_x e^{-\varphi(u)} du = A(x, t, s) - A(x+z, t-z, s-z) {}_z p_x e^{-\varphi(z)},$$

aus der man durch Differentiation herleitet:

$$P(x, t, s, z) = A(x+z, t-z, s-z) \varrho(z) \frac{\partial A(x+z, t-z, s-z)}{\partial z} + A(x+z, t-z, s-z) \mu(x+z).$$

Sonderfälle ergeben sich, wenn man $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow 0$, $s = 0$ setzt. Die Gleichungen gestatten unmittelbare Rückschlüsse auf die Form des Verzinsungsgesetzes. Multipliziert man die zweite Gleichung mit dz , so kann man das Polynom in zwei leicht zu deutende Summanden: $A(x+z, t-z, s-z) \mu(x+z) dz$, „quota attuariale“, und $A(x+z, t-z, s-z) \varrho(z) dz - \frac{\partial A(x+z, t-z, s-z)}{\partial z} dz$, „quota finanziaria coretta“, spalten. Für besondere Annahmen ergeben sich z. B. die Sätze: „Die natürliche Prämie für eine stetige, unmittelbare, lebenslängliche Ablebensversicherung vom Betrage 1 bei dem Eintrittsalter x ist im Zeitpunkt z gleich $\mu(x+z) dz$. Die natürliche Prämie für eine aufgeschobene Kapitalsversicherung ist während der Aufschubsdauer Null.“

F. Knoll (Wien).

Lenzi, Enrico: Assicurazioni sulla vita a premio periodico ed ammortamenti. Studi in onore Salvatore Ortu Carboni 217—232 (1935).

Ist A die einmalige Nettoprämie für irgendeine Versicherung, so ist die Jahresprämie bei k gleichen Zahlungen $P = A/a_{x:k}$. Man kann annehmen, daß der Versicherungsnehmer einen Bankkredit in der Höhe A aufnimmt, um die Einmalprämie zu erlegen, sich verpflichtet, die Zinsen (in der Höhe des Zinsfußes der Versicherung) jährlich vorschüssig zu zahlen und zur Sicherung der Schuld einen Vertrag auf Er- und Ableben mit der Versicherungssumme A eingeht, seine jährlichen Zahlungen sind dann gleichfalls P . Man kann die Jahresprämie aber auch zur Erfüllung des Zinsendienstes für den Schuldrest, zur Bezahlung einer Todesfallversicherung für das laufende

Jahr auf diesen Rest und den Rest der Prämie zur Schuldtilgung verwendet denken. Nach m Jahren ist dann die Restschuld bei der Bank: $Pa_{x+m, \bar{k}-m}$; jede Prämie läßt sich also in einen Teil, der das Todesfallrisiko enthält, und einen Teil, der den Charakter einer Sparprämie besitzt, aufspalten. Die Überlegungen lassen sich auch auf die Tarifprämien ausdehnen und führen auch dort zu einer analogen Aufspaltung der Prämie.

F. Knoll (Wien).

Jecklin, Heinrich: Kleiner Beitrag zur Theorie der Versicherung anormalen Risiken. Bl. Versich.-Math. 3, 388—394 (1936).

● **Steinbuch, Hans:** Untersuchungen über die Gruppenversicherung in der Lebensversicherung. Hamburg: Verl. Schimkus 1934. 44 S.

Numerische und graphische Methoden.

● **Tables of the higher mathematical functions. Computed and compiled under the direction of Harold T. Davis. Vol. 2.** Bloomington, Indiana: Principia press, Inc. 1935. XIII, 391 pag.

Volume 1 of this work was reviewed in this Zbl. 8, 267. The present volume contains 37 additional tables, covering the Polygamma functions [the successive derivatives of $\log \Gamma(x)$], the Bernoulli polynomials and numbers, the Euler polynomials and numbers, and certain functions useful in unweighted polynomial approximation. These latter are closely related to the Legendre polynomials, being essentially the analogue of the Legendre polynomials for finite summation. A bibliography supplementary to that given in Vol. 1 is included. The tables appear to be carefully checked and printed, and to be very trustworthy.

Whittaker (Edinburgh).

● **Mackey, Charles O.:** Graphical solutions. New York a. London: John Wiley & Sons, Inc. 1936. VII, 130 pag. a. 53 fig. bound 12/6.

Zusammenstellung des Lehr- und Übungsstoffes aus einem Kursus über graphisches Rechnen für Ingenieure und Studierende. I. Doppelleitern. II. Rechenschieber, einschl. Sonderschieber. III. Netztafeln. IV. Fluchtentafeln. V. Aufstellung von empirischen Formeln. In V sind eine Anzahl der am häufigsten vorkommenden Ansätze zur formelmäßigen Darstellung von durch Meßpunkte gegebenen Funktionen besprochen und die Koordinatennetze, die hier jeweils zur Verstreckung dienen können. Die Behandlung ist ganz elementar, zuweilen bloß rezeptmäßig. Die zahlreichen teils ausgeführten, teils nur als Aufgabe gestellten Beispiele sind durchweg aus der Ingenieurpraxis gegriffen.

S. Gradstein (Eindhoven).

Germansky, Boris: Zur angenäherten Auflösung linearer Gleichungssysteme mittels Iteration. Z. angew. Math. Mech. 16, 57—58 (1936).

Verf. bezieht sich auf den Bericht von Mises und Pollaczek-Geiringer über „Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung“ [ib. 9 (1929)]. Dort war bewiesen: daß das Iterationsverfahren für ein in „aufgelöste Form“ gebrachtes lineares Gleichungssystem $x = Kx + s$ dann und nur dann konvergiert, wenn für alle Eigenwerte κ von K : $|\kappa| < 1$. — Verf. beweist nun: I. „Die Bedingung, daß alle Eigenwerte λ der Matrix $L = K'K - E$ negativ sind, ist notwendig und hinreichend dazu, daß — unabhängig vom Anfangsvektor — die iterierten Vektoren $x^{(v+1)} = Kx^{(v)} + s$ gegen den Lösungsvektor x „monoton konvergieren“, d. h. daß $|z^{(v)}| = |x^{(v)} - x| \downarrow 0$.“ Das ergibt sich aus der Betrachtung der affinen Abbildung $v = Ku$, der die $z^{(v)}$ unterliegen. — Für $K' = K$ sind die Forderungen nach Konvergenz und nach monotoner Konvergenz identisch; denn dann gilt wegen $\lambda = \kappa^2 - 1$ das gleiche für die beiden Konvergenzbedingungen. — II. „Ist $K' = K$ und konvergiert die Iteration bei beliebigem Anfangsvektor, so konvergiert sie auch monoton.“

Bodewig (Basel).

Collatz, Lothar: Über das Quadratwurzelziehen mit der Rechenmaschine. Z. angew. Math. Mech. 16, 59—60 (1936).

Bei der Berechnung der Quadratwurzel \sqrt{a} kann man $a > 1$ annehmen und von einem Näherungswert b für \sqrt{a} ausgehen. Setzt man $b - \sqrt{a} = \varepsilon$, so erhält man durch Potenzieren Gleichungen $b_i - c_i \sqrt{a} = \varepsilon^i$ ($i = 2, 3, \dots, n$), wo b_i, c_i monoton wachsende

Zahlen sind. Der letzte Wert c_n muß noch vom Einstellwerk der anzuwendenden Rechenmaschine gefaßt werden. Man erhält nun durch Division nicht nur einen Näherungswert $\frac{b_n}{c_n}$ für \sqrt{a} , sondern auch eine Korrektur $-\frac{\varepsilon^n}{c_n}$ dazu, wenn man nämlich ε etwa aus der ersten Gleichung mit Hilfe des erhaltenen Näherungswertes für \sqrt{a} ermittelt. Die Quadratwurzel \sqrt{a} läßt sich nach dieser Methode mit dreimal soviel Stellen berechnen wie das Einstellwerk der Maschine besitzt. *Nyström* (Helsingfors).

Ristau, Hans A.: Berechnung der Fehler von Rechenstabrechnungen. Z. angew. Math. Mech. 16, 33—48 (1936).

Verf. gibt eine sehr ins Einzelne gehende Untersuchung der Fehler bei Rechenstaberrechnungen. An Elementarfehlern betrachtet er Lagefehler der Teilstreiche, Abrundungs-, Interpolations-, Einschätz-, Einstell-, Läuferfehler. Für die Elementarfehler werden Höchstwerte und Verteilungen angegeben. Diese Fehler überlagern sich beim Schieberrechnen je nach dem vorliegenden Rechenausdruck in verschiedener Weise. Für einfache Rechenausdrücke berechnet Verf. aus seinen Annahmen die zu erwartenden mittleren und Höchstfehler und vergleicht sie mit experimentell gefundenen. Insbesondere bei den mittleren Fehlern ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Die Theorie läßt sich zur Vorausbeurteilung von geplanten Rechenstiebern verwenden.

Theodor Zech (Darmstadt).

Levinson, Norman: The Fourier transform solution of ordinary and partial differential equations. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 14, 195—227 (1935).

Darstellung der Methode der Fourier- bzw. Laplace-Transformation zur Lösung von im wesentlichen linearen Problemen, die auf gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen führen, für den Gebrauch des Ingenieurs, ohne Durchführung von Konvergenzbetrachtungen. Durchrechnung zahlreicher bekannter Beispiele aus der Theorie der Wärmeleitung und diskontinuierlicher und kontinuierlicher elektrischer Netzwerke.

Baerwald (Tomsch).

McFarland, Thomas C.: Tables for power-series calculations involving independent variable of two harmonic components. Univ. California Publ. Engrg 3, 191—234 (1935).

In der Radiotechnik, wie auch in manchen dynamischen und magnetischen Problemen, trifft man auf nichtlineare Kennlinien, die durch eine Potenzreihe $y = \sum_{i=0}^{i=N} A_i x^i$ näherungsweise dargestellt werden.

In vielen praktischen Fällen besteht die unabhängige Variable (z. B. die Spannung) aus zwei periodischen Komponenten $x = C \cos \alpha + V \cos \beta$. Bei der Auswertung der Potenzreihe entstehen dann in y harmonische Glieder aller Ordnungen, $K_{jC} \cos j\alpha$ und $K_{jV} \cos j\beta$, und Mischfrequenzen, ${}_2K_{lC} [\cos(k\alpha - l\beta) + \cos(k\alpha + l\beta)]$, usw. Die Koeffizienten K können in der Form

$$K_n = A_n B_n C^n + A_{n+2} B_{n+2} C^{n+2} + \dots$$

geschrieben werden, wo die B_n gewisse, für jedes K verschiedene, vom Amplitudenverhältnis $k = V/C$ abhängende Zahlenfaktoren sind. Die Faktoren B_n bis $n = 21$ sind hier für das konstante Glied (K_0), für die drei ersten Harmonischen (K_{1C} , K_{1V} , ..., K_{3V}) und für die gemischten Glieder zweiter und dritter Ordnung (${}_1K_1$, ${}_2K_{1C}$ und ${}_2K_{1V}$) in Tabellen- und Kurvenform als Funktionen von k angegeben, was die Ausführung aller Rechnungen der gleichen Art verhältnismäßig bequem möglich macht. Ein Beispiel aus der Radiotechnik (Modulation einer Trägerwelle) erläutert die Anwendung der Tabellen.

S. Gradstein (Eindhoven).

Holtmark, J., and S. Westin: An electrical calculating machine for the calculation of electron scattering curves. Norske Vid. Selsk., Forh. 8, 87—90 (1935).

Zur Bestimmung der Einzelphasen δ_n in der Formel

$$f(\vartheta) = \frac{\lambda}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [\exp(2i\delta_n) - 1] P_n(\cos \vartheta)$$

für die Streuung von Elektronenstrahlen aus der beobachteten Streukurve $|f(\vartheta)|$ werden die Spannungen benutzt, die ein gleichförmig rotierendes magnetisches Drehfeld in einer Reihe von gleichen, auf einer Achse befindlichen Spulen induziert, deren Windungsebenen um beliebige Winkel δ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) gegeneinander gedreht werden können. Diese Spannungen werden, ähnlich wie bei der bekannten Mallockschen Maschine zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen, den Primärwicklungen von N bzw. $(N - 1)$ zugehörigen Transformatoren zugeführt, die dem Idealzustand möglichst nahe kommen. Jeder Transformator besitzt M Sekundärwicklungen, deren relative Windungszahlen gleich $P_n(\cos \vartheta_m)$ sind, $m = 1, 2, 3, \dots, M$, wobei $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2, \dots, \vartheta_M$ eine Reihe äquidistanter Winkel ist. Alle m -ten Sekundärwicklungen sind in Reihe geschaltet und werden über ein Frequenzfilter je einem Röhrenvoltmeter R_m zugeführt. Die Anzeigen der R_m ergeben dann die Werte von $f(\vartheta_m; \delta_n)$. Liegt eine experimentell gefundene Kurve $f(\vartheta)$ vor, so adjustiert man die Spulenkinkel δ_n so lange, bis für die M Werte Übereinstimmung besteht. Diese Einstellung geht viel rascher vonstatten als das übliche numerische Verfahren. *Baerwald* (Tomsk).

Bachmann, W.: *Essai sur la théorie vectorielle des moindres carrés*. Schweiz. Z. Vermessgswes. **34**, 34—38 u. 52—56 (1936).

Zur Lösung zahlenmäßiger Aufgaben der Ausgleichsrechnung bietet die vektorielle Behandlung derselben keinerlei Vorteile gegenüber dem üblichen algebraischen Verfahren. Hingegen ist die vektorielle Theorie der Ausgleichsrechnung der üblichen Theorie in mancher Hinsicht überlegen. Verf. behandelt Vektoren mit n Komponenten, wobei die Zahl n die Anzahl der Beobachtungen angibt. Folgende Aufgaben werden erörtert: Bestimmung des mittleren Fehlers einer Einzelbeobachtung und des arithmetischen Mittels mehrerer Beobachtungen, Untersuchungen über vermittelnde Beobachtungen, bedingte Beobachtungen und Korrelatengleichungen. *Schmehl*.

Geometrie.

● **Forsyth, A. R.:** *Intrinsic geometry of ideal space*. Vol. 1 a. 2. London: Macmillan & Co., Ltd. 1935. Vol. 1: 579 pag., vol. 2: 669 pag. 6/-.

Klíř, Ladislav: *La trisection d'un angle à l'aide d'une hyperbole*. Rozhl. mat.-přírodověd. **15**, 85—87 (1936) [Tschechisch].

Baker, H. F.: *On the contacts of circles*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 1 bis 11 (1936).

Die Arbeit knüpft an einen von Quidde aufgestellten Satz [Arch. d. Math. u. Phys. **15**, 197—204 (1850)] über drei sich in einem Punkt treffende Tangenten dreier Kreise einer Ebene an; der Satz wurde beim Aufbau der Steinerschen Lösung des Malfattischen Problems gebraucht. Neville lenkte neuerdings die Aufmerksamkeit auf dieses Quiddesche Theorem [Math. Gaz. **15**, 134, 257 (1930)] und seine projektive Ableitung aus dem Raume, indem die Kreise als Projektionen dreier ebener Schnitte einer F_2 betrachtet werden. Sein Beweis kann dann auf den Satz von Poncelet über drei Kegelschnitte im Raum gestützt werden. Dieser letztere Satz sagt aus, daß, wenn je zwei dieser Kegelschnitte zwei gemeinsame Punkte haben, sie auf einer F_2 liegen. Der Satz ist, wie Neville anmerkt, nicht richtig, wenn die drei Kegelschnitte Punkte gemein haben, ausgenommen der Fall, wo die Tangenten der Kegelschnitte in einem solchen Punkt in einer Ebene liegen. In diesem Falle verlangt der Beweis des Quiddeschen Satzes höhere Hilfsmittel und Überlegungen. Dieser Aufgabe unterzieht sich der Verf., indem er mit Methoden der algebraischen Geometrie zeigt, daß Poncelets Satz immer anwendbar ist, obwohl seine Heranziehung in diesem Zusammenhang nicht nötig ist. — Einen wesentlichen Fortschritt gegenüber Quidde u. a. hatte in dieser Richtung schon Mannheim erzielt [Nouv. Ann. de Math. **13**, 210 (1854)]. Er zeigte, daß es, um drei Kreise zu erhalten, die sich in Quiddescher Lage befinden, nur nötig ist, drei beliebige

Schnitte einer F_2 von einem Punkt einer gewissen auf der F_2 gelegenen Kurve vierter Ordnung aus zu projizieren. Man erhält dann drei Kreise, von denen jeder zwei der gegebenen Kreise berührt.

Steck (München).

Peters, Hans: Untersuchungen über abhängige Punktfiguren. Bonn: Diss. 1936. 49 S.

Il est depuis longtemps connu [R. Sturm, Math. Ann. 1, 536 (1869)] que, si l'on considère cinq couples de points P_i, Q_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), pris ordonnément d'une façon générique dans deux plans π, χ , il leur reste associé un sixième couple de points P_6, Q_6 de π, χ , jouissant de la propriété suivante: chacune des ∞^3 corrélations entre π, χ qui ont les cinq couples assignés comme couples de points réciproques, admettent aussi P_6 et Q_6 comme points réciproques. Ceci découle très simplement de la représentation, due à C. Segre, des corrélations entre π et χ avec les points d'un S_3 ; les couples de points de π, χ , considérés comme couples de points singuliers des corrélations dégénères entre π et χ , se représentent dans S_3 avec les points d'une V_4^6 de C. Segre, et à six couples comme P_j, Q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) correspondent six points de V_4^6 linéairement dépendant, c'est-à-dire existant dans un S_4 ; pour cela les six couples envisagés sont dit entre eux dépendant (par rapport aux corrélations entre π et χ) (cfr. J. Rosanes, J. reine angew. Math. 88, 241 (1880)). Ici l'a. donne deux constructions différentes de P_6, Q_6 à partir de $P_1, P_2, \dots, P_5, Q_1, Q_2, \dots, Q_5$; en même temps il approfondit l'étude de la configuration qui dérive de six couples de points dépendant, en suivant la voie hyperspatielle indiquée et en se basant sur les propriétés connus de l'hexastigma (configuration déterminée par six points génériques de S_4) [cfr. H. W. Richmond, Quart. J. Math., Oxford Ser. 31 (1900)]. Parallèlement à cette recherche, il conduit celle semblable concernant les groupes de six points du plan complexe (déjà considérés par C. Segre et E. Study) qui sont dépendant vis-à-vis des anticorrélations involutives du plan (nommées par l'a. „Hermiteschen Punktkomplexen“). — Suivent des développements, en grande partie analogues aux précédents, sur les groupes de huit couples de points de deux espaces ordinaires et sur les groupes de huit points d'un espace ordinaire, qui sont respectivement dépendants par rapport aux corrélations et aux anticorrélations involutives de l'espace.

Beniamino Segre (Bologna).

Dixon, A. L.: On skew polygons whose sides are, alternately, generators of two quadric surfaces. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 60—73 (1936).

Wenn ein Büschel von Flächen 2. Ordnung gegeben ist, kann man solche $(4n+2)$ -Ecke betrachten, die in der Basiskurve C des Büschels eingeschrieben sind, und deren Seiten abwechselnd zwei Regelscharen angehören, die auf zwei verschiedenen Flächen des Büschels liegen. Wenn ein Polygon der gesuchten Art vorhanden ist, so existieren unendlich viele ähnliche Polygone; und die $2n+1$ Paare von Gegenseiten eines jeden der betrachteten Polygone sind polar in bezug auf eine bestimmte Quadrik (Quadrik von Schur, wenn $n=1$). Grundlage der Untersuchung ist eine parametrische Darstellung der Kurve C und der verschiedenen Flächen des Büschels durch Jacobische elliptische Funktionen $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$. Zunächst der Fall $n=1$: analytische Bedingungen (die von zwei Flächen des Büschels erfüllt werden müssen) für die Existenz eines windschiefen Sechsecks mit der gewünschten Eigenschaft; die drei Sechsecke $AA'BB'CC', AC'BA'CB', AB'BC'CA'$ führen zu drei Quadriken des Büschels und zu drei Quadriken von Schur, und alle Schurschen Quadriken, die aus den unendlich vielen verschiedenen Sechsecken entstehen, gehören einem Büschel an. Es folgt die Verallgemeinerung für einen beliebigen Wert von n ; und die Diskussion der invarianten Beziehung, die zwischen einigen der betrachteten Quadriken besteht. Als Nebenergebnisse eine besondere Form des Additionstheorems für die Jacobischen Funktionen, die Beziehung der behandelten Fälle mit dem wohlbekannten Ponceletschen Schließungssatz und eine Bemerkung über die Entwicklung von $\operatorname{sn}(2n+1)u$.

E. G. Togliatti (Genova).

Vaidyanathaswamy, R.: On the affine classification of quadric loci. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 259—265 (1935).

Die affine Einteilung der Quadriken eines reellen projektiven S_n wird auf die Betrachtung folgender vier Zahlen gestützt: den Rang r der gegebenen Quadrik Q , die kleinste Anzahl s der Glieder mit demselben Zeichen in der kanonischen Gleichung von Q , und die beiden ähnlichen Zahlen r_1, s_1 für den Schnitt von Q mit der unendlich fernen Hyperebene. Jene vier Zahlen bilden ein vollständiges affines Invariantensystem für Q . Dieselben Gedanken und Einteilungen sind schon z. B. im 2. Bd. § 20 des Buches von O. Schreier und E. Sperner entwickelt (s. dies. Zbl. 13, 145).

E. G. Togliatti (Genova).

Williams, A. R.: Remark on a recent paper by Hollcroft. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 89—92 (1936).

Ein ∞^3 Linearsystem von Quadriken eines $(n-1)$ -dimensionalen Raumes enthält $\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$ Kegel 2. Art. Beweis im Falle $n=3$ und im allgemeinen Falle durch unmittelbare Betrachtung der Determinante des Systems. Alles bekannt: s. C. Segre, Enzykl. d. math. Wiss. III c 7, Anm. 499. *E. G. Togliatti (Genova).*

Graf, Ulrich: Über einscharig in der linearen Strahlenkongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades. Math. Z. 40, 671—682 (1936).

Ein Strahl einer regulären Kongruenz wird analytisch und konstruktiv auf einen Speer einer mit hyperbolischer, euklidischer oder elliptischer Maßbestimmung begabten Ebene und dieser dann auf eine Minimalebene eines pseudohyperbolischen, pseudo-euklidischen oder pseudoelliptischen Raumes abgebildet. (Im Falle einer regulären Grundfläche entsteht also die in der Kleinschen Abbildung des Linienkontinuums auf M^2 im R_5 enthaltene Abbildung der Kongruenz auf eine Fläche 2. Ordnung.) Es wird die Zuordnung der entsprechenden Gruppen untersucht und eine Übertragung einzelner Sätze vorgenommen. Dabei entsprechen den Ebenen des Bildraumes einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Regelflächen, den (als Ort von Ebenen aufgefaßten) Kugeln und Kreisen der auf das Fundamentalgebilde des Bildraumes bezogenen nichteuklidischen Geometrie „sphärische R^2 Kongruenzen“ und „sphärische R^2 Reihen“.

E. A. Weiss (Bonn).

Strubecker, Karl: Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes. (Ein Beitrag zur Kinematik der Minimalebene.) Mh. Math. Phys. 42, 309—376 (1935).

(Vgl. das Referat über die vorläufige Mitteilung: dies. Zbl. 10, 269.) Wählt man zu Koordinaten eines Linienelementes in der Ebene die Koordinaten x, y seines Punktes und $p = dy:dx$ seiner Richtung, so wird die Richtung parallel zur y -Achse ausgezeichnet. Der Verf. denkt sich daher die Ebene als Minimalebene mit den Parallelen zur y -Achse als Minimalgeraden und beginnt seine Arbeit mit einer Grundlegung der Geometrie in einer Minimalebene. Einem Punkte x, y dieser Ebene wird die duale Zahl $z = x + \varepsilon y$ ($\varepsilon^2 = 0$) zugeordnet. Die ganzen linearen Transformationen $z' = \alpha z + \beta$ liefern dann die Transformationen einer Gruppe \mathfrak{G}_4 von Affinitäten der „Grenzgruppe“. Diese enthält invariant die Gruppe der Grenzbewegungen, welche den „Abstand“ zweier Punkte ungeändert lassen. Erweitert man ihre Transformationen einmal, so erhält man die Darstellung der Grenzbewegungen in Koordinaten von Linienelementen. Die 5 verschiedenen Typen eingliedriger Untergruppen von \mathfrak{G}_3^* werden angegeben und geometrisch charakterisiert. \mathfrak{G}_3^* ist einfach transitiv. Man kann daher ein Linienelement als Protosoma festhalten und die übrigen Linienelemente als Somen derart ansehen, daß jedes dieser Elemente die Bewegung von \mathfrak{G}_3^* darstellt, welche das Protosoma in dieses Element überführt. Eine sachgemäße Darstellung der erweiterten Gruppe \mathfrak{G}_3^* erhält der Verf. mit Hilfe eines Systems komplexer Zahlen $\sum x_i e_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) mit der Multiplikationstabelle: $e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$, $e_1 e_3 = e_2$, in allen übrigen Fällen $e_i e_k = 0$. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Bewegungen der Grenzgruppe in der Gestalt $x' = \alpha x$ schreiben. Neben diese Gruppe der Rechtsbewegungen tritt die zu ihr reziproke Gruppe der Linksbewegungen \mathfrak{G}_3^l : $y' = \beta y$. Die Transformationen auch dieser Gruppe werden klassifiziert und geometrisch (als „militärische Exerzierbewegungen“) gedeutet. Die beiden Gruppen haben eine ausgezeichnete eingliedrige Untergruppe gemeinsam. Ihr Produkt liefert daher nur eine Gruppe \mathfrak{G}_5 : $x' = \beta x \alpha$, welche den natürlichen Äquivalenzbegriff für die Kinematik der Minimalebene liefert. Deutet man nun die 4 Koordinaten eines Somas als Punktkoordinaten

im R_3 , so erhält man die Liesche Abbildung der Linienelemente der Ebene auf den Punkt-
raum $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : p$. — Zu einer zweiten, ebenfalls zuerst von Lie betrachteten,
Abbildung der Linienelemente der Ebene auf den Punkttraum kommt der Verf., indem er
von einer zweiten Parameterdarstellung der Gruppe \mathcal{G}_3^* ausgeht. Die Parameter der neuen
Darstellung stehen mit den Parametern der ersten Darstellung in einer quadratischen Be-
ziehung. Auch die neuen Parameter lassen sich zu einer höheren komplexen Zahl $\sum x_i e_i$ zu-
sammenfassen, für welche jetzt das Multiplikationsschema $e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$, $e_1 e_3 = -e_3 e_1 = e_2$,
sonst $e_i e_k = 0$ gilt. Deutet man die neuen Parameter als homogene Punktkoordinaten im

Raume, so erhält man die zweite Liesche Abbildung: $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 1 : x : y - \frac{x p}{2} : \frac{p}{2}$. Der
Verf. nennt sie Lie-Studysche Abbildung wegen ihres gleich zu beschreibenden Zusammen-
hangs mit der Studyschen Kinematik. Es wird gezeigt, daß es eine dritte Möglichkeit der
Abbildung in dieser Art nicht gibt, weil die Gruppe \mathcal{G}_3^* eine Darstellung mit einem dritten
System höherer komplexer Zahlen nicht zuläßt. — Bei der Abbildung der Linienelemente
auf einen Raum $R_I = R_{II}$ vermöge der beiden Abbildungen entsprechen den Gruppen \mathcal{G}_3^* , \mathcal{G}_3^*
das eine Mal „Rechts- und Linksdrehungen D_3^*, D_3^* “, das andere Mal „Rechts- und Links-
schiebungen S_3^*, S_3^* “. Die beiden Gruppenpaare liefern je eine 5gliedrige Übergruppe G_5 .
Diese beiden Gruppen erweisen sich aber als identisch. G_5 kann als eine ausgezeichnete Gruppe
von Bewegungen in einem R_3 gedeutet werden, der als absoluten Kegelschnitt ein Geraden-
paar besitzt. Diese „Grenzbewegungen des isotropen Raumes“ sind in der Gruppe G_6 aller
Bewegungen des isotropen R_3 dadurch charakterisiert, daß sie in allen isotropen oder voll-
isotropen Ebenen, die bei G_6 fest bleiben, Grenzbewegungen induzieren. Den Äquivalenz-
begriff der Kinematik in der Minimalebene kann man jetzt so definieren: Als äquivalent
gelten Somenfiguren, deren Bilder im R_3 hinsichtlich G_5 bewegungsinvariant sind. Die Grund-
lagen der Geometrie im isotropen R_3 werden mit Hilfe einer Abbildung untersucht, welche
zur Abbildung der Geraden eines elliptischen Raumes auf Strahlenpaare eines Bündels analog
ist. — Die gruppentheoretische Durchdringung der beiden Abbildungen wird schließlich be-
nutzt, um das offene Kontinuum der Linienelemente zu einem natürlichen abzuschließen.
Das kann auf zweierlei Arten geschehen, je nachdem die Gruppe G_5 als in der konformen
oder projektiven Gruppe eingebettet gedacht wird. Im ersten Falle ergibt sich ein konischer
Abschluß: Das Kontinuum erhält den Zusammenhang eines Kegels M_3^* des R_4 , mit dessen
Hilfe übrigens ein einfacher konstruktiver Übergang von der Lieschen zur Lie-Studyschen
Abbildung möglich ist. Der quaternäre Abschluß ergibt sich, wenn man sich die Be-
wegungen \mathcal{G}_3^* der Minimalebene von räumlichen Bewegungen induziert denkt. Diese gehören
dann zu einem Somengebüsch, das (nach Study) auf einen erzeugenden R_3 einer M_3^* des R_7
abgebildet werden kann (daher der Name Lie-Studysche Abbildung). — Die Gruppe \mathcal{G}_3^* ist

in der Gruppe $z = \frac{\bar{\alpha} z' + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} z' + \bar{\delta}}$ von Punkttransformationen der Minimalebene enthalten. Aus
dieser können auf einfache Weise die Bewegungen des Raumes und ihre Darstellung mittels
Biquaternionen gewonnen werden. (Vgl. D. Barbilian, dies. Zbl. 9, 369. Der erste Teil
der Arbeit handelt von dieser Herleitung.) E. A. Weiss (Bonn).

Kokotsakis, A. I.: Über die Beweglichkeit der Polyeder. Prakt. Akad. Athénon
10, 338—342 (1935).

Es wird gezeigt, daß die Behauptungen von Roussopoulos über die Starrheit
von Polyedern unrichtig sind (vgl. dies. Zbl. 12, 220, wo bereits hierauf hingewiesen
wurde). Die Schlüsse von Roussopoulos beruhen auf der Verwechslung von statischer
und kinematischer Unbestimmtheit eines Fachwerks. W. Fenchel (Kopenhagen).

Blaschke, Wilhelm: Integralgeometrie 10. Eine isoperimetrische Eigenschaft der
Kugel. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 37, 7 S. (1936).

Neuer Beweis der Minkowskischen Ungleichung $M^2 \geq 4\pi O$, wo O die Oberfläche
und M das Integral der mittleren Krümmung eines konvexen Körpers bezeichnen.
Durch eine einfache integralgeometrische Überlegung, die darauf beruht, daß O das
Geradenmaß und M das Ebenenmaß des Körpers ist, wird gezeigt, daß es genügt,
die folgende auf einen ebenen konvexen Bereich bezügliche Ungleichung zu beweisen:
Sind F der Flächeninhalt und $b(\varphi)$ die Breite des Bereichs in der Richtung φ , so gilt

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(\varphi_2 - \varphi_1)| b(\varphi_1) b(\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \geq 8F,$$

und das Gleichheitszeichen steht nur für den Kreis. Dies wird auf Hurwitzsche Weise
durch Fourientwicklung bewiesen. W. Fenchel (Kopenhagen).

Algebraische Geometrie:

Vondráček, Aug.: Courbe plane de 5^{ième} ordre de genre deux. Čas. mat. fys. 65, 142—152 u. franz. Zusammenfassung 152—153 (1936) [Tschechisch].

Defrise, P.: Réduction à l'ordre minimum des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre 3. Mathesis 50, 61—72 (1936).

Fortsetzung einer früheren Abhandlung (dies. Zbl. 13, 33) über die Reduktion zur kleinsten Ordnung der Linearsysteme ebener Kurven. Hier werden die aufeinanderfolgenden adjungierten Systeme eines gegebenen Linearsystems betrachtet; wenn man weiß, daß die letzten adjungierten Kurven, die vorhanden sind, die Ordnung $n - 3j + 3$ haben, so kann man leicht bestimmte Grenzen für die Ordnung n des gegebenen Systems und für die höchste Multiplizität seiner Basispunkte angeben. Und so erhält man eine Reihe von Sätzen, die, zusammen mit denjenigen der früheren Abhandlung, gestatten, teils wie bei Ferretti [Rend. Circ. mat. Palermo 16 (1902)], teils einfacherer Weise alle irreduziblen Systeme zu bestimmen. Eine Tafel enthält die Klassifikation aller Systeme mit dem Geschlecht $p = 2$ oder $p = 3$ nebst einigen ihrer Eigenschaften.

E. G. Togliatti (Genova).

Bottema, O.: Die Wendepunkte der rationalen Raumkurve vierter Ordnung. Nieuw Arch. Wiskde 18, 59—72 (1936) [Holländisch].

Vier auf einer quadratischen Fläche Q gegebene Punkte sind im allgemeinen nicht planare Wendepunkte einer auf Q liegenden Raumkurve 4. Ordnung zweiter Art. Verf. leitet Eigenschaften der Figur ab, die aus vier derartigen Wendepunkten besteht. Er bestimmt die Grassmannschen Doppelverhältnisse $U:V:W$ der vier auf der Fläche $Q \equiv xz - yw = 0$ liegenden planaren Wendepunkte der Kurve $x:y:z:w = t(t^2 - 1):t^2(t^2 - E^2):(t^2 - 1):t(t^2 - E^2)$. Es ergibt sich der folgende Satz: Wenn die Verbindungsgerade zweier Wendepunkte auf Q liegt, so liegt die Verbindungsgerade der beiden anderen Wendepunkte auch auf Q . Die Kurven mit dieser Eigenschaft werden vom Verf. untersucht. Wenn man die Größen U, V und W als homogene Abstandskordinaten in einer Ebene (für ein gleichseitiges Koordinatendreieck) interpretiert, bekommt man eine rationale Kurve achter Ordnung K_8 , die vom Verf. betrachtet wird. So bestimmt er z. B. die Schnittpunkte von K_8 mit dem eingeschriebenen Kreis des Koordinatendreiecks, dessen Punkte die koplanaren Punktequadrupel abbilden; er findet, daß die Wendepunkte koplanar sind für eine Kurve mit Doppelpunkt, worauf sie eine harmonische, und für eine andere Kurve, worauf sie eine äquianharmonische Gruppe bilden. Auch betrachtet er die Raumkurven, die den 21 Doppelpunkten von K_8 zugeordnet sind. Die Punkte eines einem einfachen Punkte von K_8 zugeordneten Quadrupels sind die Wendepunkte einer bestimmten Raumkurve.

G. Schaake (Groningen).

Togliatti, Eugenio G.: Alcune osservazioni intorno ad una particolare superficie di 5° ordine. Studi in onore Salvatore Ortu Carboni 253—259 (1935).

If a surface F of the fifth order possesses a general triple point O , it projects from O into a double plane whose branch curve is of the eighth order and is touched in twelve points by the cubic curve in which the plane meets the tangent cone at O . If F possesses in addition a number of conical nodes these are projected into nodes of the branch curve. The author shows that the greatest number of nodes that can arise in this way is 24, the branch curve in this case consisting of four conics. There are two types of surface, according as the four conics all belong to the same system of tritangent conics of the cubic, or belong in pairs to two different systems. In the latter case the quintic surface is of the type considered by Milne [Proc. London Math. Soc. (2) 33, 165 (1931); this Zbl. 3, 219].

J. A. Todd (Manchester).

Green, H. G., and L. E. Prior: The classification of the lines of cubic surfaces passing through a plane cubic curve which has six given points on six of the lines. Proc. London Math. Soc., II. s. 41, 16—25 (1936).

Eine Ebene schneide eine Fläche 3. Ordnung F^3 in einer Kurve 3. Ordnung C^3 .

6 Geraden der F^3 schneiden in 6 Punkten. Mit der Frage, wie man von ihnen ausgehend die Punkte bestimmt, in denen die übrigen 21 Geraden der Fläche die Ebene schneiden, hat sich T. L. Wren beschäftigt [J. London Math. Soc. 6, 16—22 (1931); dies. Zbl. 1, 226]. Hier werden als Fortsetzung der Untersuchungen von Wren folgende Fragen behandelt: 1. Welche gegenseitige Lage können die durch 6 Punkte der ebenen Kurve 3. Ordnung laufenden Geraden der F^3 haben, wenn vorausgesetzt wird, daß sich die 6 Punkte in allgemeiner Lage befinden? Es sind 20 Fälle zu unterscheiden. 2. Vorausgesetzt wird, daß die 6 Punkte der C^3 einem Kegelschnitt angehören. Den 20 Fällen entsprechend wird angegeben, ob das System der Schnittpunkte von 6 Geraden einer regulären F^3 geliefert wird oder welche Singularität auf der F^3 vorausgesetzt werden muß; ferner, welche besondere Lage die Schnittebene haben muß, damit sich ein Punktsextupel der vorgegebenen Art ergibt. 3. Wenn in einem vorgelegten System von 27 Schnittpunkten der Geraden von F^3 mit einer Ebene ein Punktsextupel vom Typus $A_1, A_2, A_3, A_4, B_5, B_6$ (es handelt sich um Schnittpunkte der Geraden a_i, b_k einer Schläfli'schen Doppelsechse) einem Kegelschnitt angehört, so besitzt die F^3 eine Singularität. Je nachdem es sich um einen regulären Kegelschnitt handelt oder einen solchen, der in zwei Geraden zerfällt, die sich auf der C^3 schneiden, nicht auf der C^3 schneiden oder die sogar zusammenfallen, ergeben sich verschiedene Arten singulärer F^3 . Die Verff. gewinnen auf diese Weise eine Übersicht über die Ausartungen, die das Geradensystem einer Fläche 3. Ordnung erfährt, sobald die Fläche eine oder mehrere Singularitäten erhält.

E. A. Weiss (Bonn).

Wiman, A.: Über die asymptotischen Kurven der Flächen $x^p w^q - \lambda y^p z^q = 0$. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 A, Nr 11, 1—15 (1935).

Die nicht geradlinigen Asymptotenlinien dieser Regelflächen gehören zur besonderen Art von W -Kurven, welche nach H. Mohrmann als ausgezeichnete W -Kurven bezeichnet worden sind, da die Fläche $x^p w^q - y^p z^q = 0$ eine Gruppe von ∞^2 projektiven Transformationen $x': y': z': w' = \alpha x: \beta y: \gamma z: \delta w$ in sich gestattet und das System der asymptotischen Kurven in sich übergehen muß, wenn man x und y einerseits, z und w andererseits vertauscht. Als Doppelkurven der assoziierten Regelfläche einer ausgezeichneten W -Kurve $z: x: y: w = t^{n_1+n_2}: t^{n_1}: t^{n_2}: 1$ (n_1 und n_2 ganz, teilerfremd und > 0), welche asymptotische Kurve ist auf der Fläche

$$x^{n_1+n_2} w^{n_1-n_2} - y^{n_1+n_2} z^{n_1-n_2} = 0,$$

bekommt man immer asymptotische Kurven dieser Fläche, und in entsprechender Weise umhüllen die Doppeldeveloppablen asymptotische Kurven dieser Fläche. Für ungerade n_1 und n_2 zerfällt diese Fläche in zwei andere und von den $n_1 - 1$ Doppelkurven der assoziierten Regelfläche (die Ausgangskurve mitgezählt) liegen je $\frac{n_1-1}{2}$ auf

jeder dieser beiden Flächen; die Kuspidakurve der Doppeldeveloppablen liegt dann auf der Fläche $x^{\frac{n_1+n_2}{2}} w^{\frac{n_1-n_2}{2}} - y^{\frac{n_1+n_2}{2}} z^{\frac{n_1-n_2}{2}} = 0$. Verf. gibt noch eine Verallgemeinerung des schon früher [Acta math. 64, 261 (1935); dies. Zbl. 12, 33] besprochenen Zerfallens der aus den Hauptsehn einer ausgezeichneten W -Kurve erzeugten Regelfläche. Schließlich betrachtet Verf. eine birationale und eine rationale Abbildung der Fläche $x^p w^q - y^p z^q = 0$ auf eine Ebene. Die letztgenannte bildet eine asymptotische Kurve, je nachdem $p - q$ ungerade oder gerade ist in $p - q$ bzw. $\frac{p-q}{2}$ Kegelschnitte ab.

G. Schaake (Groningen).

Frith, Ronald: The relations between the invariants of two surfaces in $(1, n)$ cyclic correspondence. Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 23—29 (1936).

Let F' be an algebraic surface on which there is a cyclic involution I_n of sets of n points, and let F be the surface whose points are in $(1, 1)$ correspondence with the sets of I_n . The author proves that under the assumptions (I) that n is a prime number, (II) that the curve of united points on F' is irreducible and belongs to a linear

system of freedom at least three, and (III) that the partial linear system in this complete system which consists of curves belonging to I_n is not compounded of a pencil, the irregularities of F and F' are equal. The method is to calculate the arithmetic and geometric genera of F' in terms of the invariants of F and of the branch curve.

J. A. Todd (Manchester).

Thullen, Peter: Determinazione della serie di equivalenza individuata dal gruppo dei punti doppi impropri d'una superficie dell' S_4 . Rend. Circ. mat. Palermo 59, 256 bis 260 (1935).

Une surface F générique de S_4 admet notoirement un certain nombre d de points doubles impropres, dans chacun desquels sont superposés deux points de F , en correspondance aux deux nappes de F qui le contiennent. Les d couples de points de la surface qui tombent dans ses points doubles impropres constituent, sur F , un groupe équivalent à $(n-10)G - 5(C, K) + S_s - S_c$, où n est l'ordre de F et, ordonnément, C, K, G, S_s, S_c désignent une courbe section hyperplane, une courbe canonique (virtuelle) impure, un groupe section plane, un groupe de Severi et un groupe canonique de F . Cette équivalence est ici établie en assujétissant F à une translation infinitésime, et en se basant sur le fait que le groupe caractéristique (virtuel) correspondant se compose du groupe cherché, du groupe des points de F ayant le plan tangent parallèle à la translation effectuée, et de la courbe à l'infini de F (dont il est déterminé l'équivalence dans le groupe caractéristique). (Des résultats — obtenus plus simplement — comprenant celui qui précède comme cas particulier, figurent dans des travaux [de M. Eger et du réf.] actuellement sous presse dans le Boll. Un. Mat. Ital.)

Beniamino Segre (Bologna).

Wong, B. C.: On certain varieties whose curve sections are hyperelliptic curves. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 99—104 (1936).

Einige Bemerkungen über eine bekannte rationale V_n^{2n+1} eines Raumes S_{2n+1} ; sie wird auf einem Raume S_n durch das System aller V_{n-1}^3 dargestellt, die die Schnitt- V_{n-2}^4 von zwei Quadriken enthalten (dies. Zbl. 2, 148 u. 9, 35). Die übrige Schnitt- $V_k^{2n-2k+1}$ von $n-k$ jener kubischen Hyperflächen liefert die Darstellung der Schnitt- V_k^{2n+1} von V_n^{2n+1} mit einem Raume S_{n+k+1} . Der Fall $k=2$ wird besonders betrachtet; man erhält so als übrige Schnittfläche von $n-2$ kubischen Hyperflächen durch V_{n-2}^4 eine Fläche F^{2n-3} mit hyperelliptischen Schnittkurven; die Projektionen dieser Fläche von $n-5$, $n-4$, $n-3$ ihrer Punkte aus auf Räume S_5, S_4, S_3 werden diskutiert.

E. G. Togliatti (Genova).

Differentialgeometrie:

Boos, Pierre: Sur certaines fonctions de deux variables attachées à des arcs de courbe. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 197—199 (1936).

La figure est formée par un arc d'une courbe de la longueur l et par la corde (la géodésique) qui le sous-tend de la longueur L . Soit s — l'abscisse curviligne de l'origine M de l'arc, d — la tangente de l'angle formé en M par l'arc et la corde. La courbe est (P) si l ne dépend que de d ; elle est (P') si l est égal au produit d'une fonction de s par une fonction de d (ce Zbl. 4, 224 et 414). En généralisant l'auteur caractérise ces courbes par les propriétés analogues de certaines autres fonctions liées à la figure; par exemple, la courbe est (P) si l'une des fonctions l, L, A (l'aire balayée par une géodésique qui passe par M et dont un point décrit l'arc), $r_2 = A/L$ etc. est une fonction impaire de la variable d ou si l'une des fonctions \bar{F} (la flèche), $r_1 = \frac{L}{l}$ etc. est une fonction paire de d . Généralisation en géométrie affine.

S. Finikoff.

Rozet, O.: Quelques remarques sur la déformation des quadriques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 46—52 (1936).

En poursuivant l'étude (ce Zbl. 12, 416) d'une déformée (S) d'un paraboloïde général et des quatre transformées (S_1^*) , (S_1^{**}) , (S_2^*) , (S_2^{**}) dont les points homologues

sont situés sur un cercle C situé dans le plan tangent de (S) , l'auteur considère la congruence de cercles (C) . Les quatre foyers de C sont deux à deux situés sur les tangentes aux lignes de (S) qui correspondent aux lignes de courbure de (S_1^*) , (S_2^{**}) . Si S_1^* est un foyer, (S_1^*) et (S_1^{**}) dégénèrent en lignes. Si (S) est une déformée d'un paraboloides de révolution, $S_1^* = S_1^{**}$ et $S_2^* = S_2^{**}$ sont situés sur les tangentes au cercle C du point S . La droite qui joint S avec le centre de C engendre une congruence w normale. Tous ces résultats s'étendent au cas où (S) est une déformée d'une quadrique à centre, non conique, de révolution.

S. Finikoff (Moscou).

Tzitzéica, Georges: Sur une déformation d'ordre supérieur. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 547—548 (1936).

L'élément linéaire de la surface S $x_i = A_i(u + a_i)^{\frac{n}{2}}(v + a_i)^{\frac{n}{2}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dépend de $2n - 1$ constantes seulement. Il existe donc ∞ surfaces S applicables. Si n est pair, S sont égales; si $n = 2p + 1$, les $p - 1$ premières courbures de chaque ligne de S restent invariables, donc S sont applicables d'ordre p (Bompiani, ce Zbl. 11, 418).

S. Finikoff (Moscou).

Long, Louis: Les surfaces (S) et les surfaces (Σ) . II. Bull. Acad. Roy. Belg., W. s. 21, 991—1004 (1935).

Soit σ — une surface rapportée aux lignes de courbure, $ds^2 = H^2 du^2 + L^2 dv^2$, $ds'^2 = h^2 du^2 + l^2 dv^2$ — les éléments linéaires de σ et de sa représentation sphérique. Si, les paramètres u, v bien choisis, on a $l = f(h)$, σ est une surface (Σ) ; si l'on a $L = \varphi(H)$, σ est une surface (S) . Chacune de ces surfaces dépend de 5 fonctions d'un argument. Une surface W est à la fois (Σ) et (S) . Quelle que soit σ , la quantité $\varepsilon = hL - lH$ satisfait à une équation de Laplace. Pour une surface (S) elle prend la forme: $\varepsilon_{uv} = \frac{L_v}{L} \varepsilon_u + \frac{H_u}{H} \varepsilon_v$. Pour une surface $W \varepsilon = 1$. De même la différence des courbures principales satisfait à une autre équation de Laplace qui admet au cas d'une surface (S) la solution $\frac{1}{HL}$. Application aux surfaces isothermiques. (I. voir ce Zbl. 13, 35.)

S. Finikoff (Moscou).

Long, Louis: Quelques systèmes remarquables de courbes sur les surfaces. III. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 53—72 (1936).

Après avoir établi les formules générales (en partie connues) de la courbure, de la courbure géodésique et de la torsion géodésique des lignes coordonnées, l'auteur examine le réseau de Tchebychef qu'il appelle un système u, v . En imposant une nouvelle condition $D = D''$ (les coefficients de la seconde forme de Gauss), il obtient une surface (S) particulière (voir le référat précédent) dont les courbures normales de u, v sont égales, les torsions géodésiques de u, v sont opposées et les lignes $u \pm v = \text{const}$, sont les lignes de courbure. Dans la dernière section l'auteur introduit le système $u \pm v = \text{const}$ (u, v sont les paramètres de lignes de courbures) et en indique les propriétés évidentes pour les surfaces déterminées par les équations $D + D'' = 0$ ou $D = D''$ (rapportées aux lignes de courbure). (II. voir le référat précédent.) *S. Finikoff*.

Vasseur, Marcel: Invariants de Laplace et déformation projective des surfaces. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 269—271 (1936).

Dans cette Note sont énoncés trois théorèmes concernant le sujet indiqué dans le titre; mais il s'agit de propriétés depuis longtemps connues, et même sous une forme plus complète, ce qui paraît avoir échappé à l'a. (sauf pour le 2^e théorème, qui est justement attribué à E. Cartan): cfr. G. Fubini-E. Čech, Geometria proiettiva differenziale 1, 106—108. Bologna: Zanichelli 1926. *Beniamino Segre* (Bologna).

Finikoff, Serge: Transformations de M. Calapso. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 548 bis 549 (1936).

Die Note schließt eng an Calapso (dies. Zbl. 12, 85) an. In den Bezeichnungen des zitierten Ref. wird hier der spezielle Fall betrachtet, wo erstens $q = -1$, zweitens $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ R -Kongruenzen erzeugen, drittens dasselbe auch für die beiden

T -Konfigurationen gilt, die aus der gegebenen durch die Calapso-Transformationen hervorgehen (die T -Konfigurationen $[M]$ des zit. Ref.). Es werden die verschiedenen Möglichkeiten (ohne Beweis) aufgezählt. Čech (Brno).

Grove, V. G.: Differential geometry of a certain type of surface in S_4 . Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 60—70 (1936).

L'auteur étudie une surface S_x , dont les courbes conjuguées forment un réseau orthogonal; S_x est située dans l'espace euclidien S_4 . En faisant la projection orthogonale sur un espace tangent S_3 on obtient une autre surface, et, correspondant à toutes les normales λ en un point, il y a ∞^1 surfaces S_λ . Quelques théorèmes simples sur les S_λ et leurs normales sont énoncés; on a p.ex. que le lieu des centres de courbure se décompose en deux droites. Finalement l'a. examine les congruences de normales à S_x . La définition de S_x la caractérise comme surface à torsion gaussienne nulle (voir ce Zbl. **12**, 226).

Fr. Fabricius-Bjerre (Copenhague).

Vincensini, Paul: Sur certaines congruences de sphères. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 617—619 (1936).

Soit S — la surface de centres d'une famille de ∞^2 sphères Σ , σ et σ' — les deux nappes de son enveloppe dont M, M' sont les points homologues. La correspondance $[M, M']$ est directe si M, M' décrivent deux contours homologues en tournant dans le même sens autour d'un droite enlacée avec chaque contour. L'auteur examine le cas où la correspondance $[M, M']$ conserve les aires de σ, σ' . Si J est le milieu de MM' et ϱ_1, ϱ_2 sont les abscisses des foyers de la congruence (MM') , on a $\varrho_1 + \varrho_2 = 0$ (si la correspondance est directe), $\varrho_1 \varrho_2 = -JM^2$ (si elle est inverse). La seconde équation est conservée par une déformation arbitraire de S . En rapportant S aux asymptotiques u, v , on peut écrire la première dans la forme: $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial \varrho}{\partial u} + b \frac{\partial \varrho}{\partial v} + c = 0$ (*) où $\sqrt{2\varrho}$ est le rayon de Σ . Les invariants de (*) sont égaux si S est minima; ils sont nuls si S est l'hélicoïde réglé minima. L'équation (*) est complètement intégrable si S est à courbure totale constante. Si S est sphérique, le plan π parallèle au plan tangent de S à la distance ϱ de l'origine enveloppe une surface S' dont S est l'enveloppée moyenne et que la méthode de Weingarten associée au paraboloid de révolution. Ce problème est donc équivalent à celui de la déformation du paraboloid de révolution.

S. Finikoff (Moscou).

Levine, Jack: Conformal scalars. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 115—124 (1936).

Im n -dimensionalen konformen Raume sei G_{ij} (mit der Determinante 1) vom Gewicht $-2/n$ gegeben. Zum Aufsuchen von differentialinvarianten Skalaren S_r der Ordnung r kann man sich, ausgehend von G_{ij} , der Haskinsschen Methode [Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 71—91 (1902)] bedienen. Man bekommt in dieser Weise ein System E_r von Differentialgleichungen. Die Haskinssche Methode, kombiniert mit der von J. Y. Thomas und A. D. Michal [Ann. of Math. **28**, 631—687 (1927)], gestattet dann (mit Hilfe von konformen Normalkoordinaten), aus E_r die Zahl $N(n, r)$ der funktional unabhängigen S_r zu bestimmen. So ist z. B. für $n \geq 4$, $r \geq 3$

$$N(n, r) = n + \left(\frac{n^2 + n - 2}{2} - \frac{n(n+r+1)}{r+1} \right) \frac{(n+r)!}{n! r!} \quad \text{Hlavatý.}$$

Schouten, J. A., und J. Haantjes: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. Compositio Math. **3**, 1—51 (1936).

Die homogenen Koordinaten $x^\omega(\omega, \mu, \lambda, \nu = 0, \dots, n)$ einer H_n unterliegen einerseits der Gruppe \mathfrak{S}_{n+1} der homogenen Koordinatentransformationen vom Grade 1, andererseits der Gruppe \mathfrak{F} der Transformationen $'x = \varrho x$ ($\varrho =$ beliebiger Skalar vom Grade Null). In bezug auf \mathfrak{S}_{n+1} und \mathfrak{F} werden Größen in H_n in üblicher Weise definiert. \mathfrak{S}_{n+1} ermöglicht auch die Einführung des lokalen (nichtgekrümmten) projektiven Tangentialraumes P_n der H_n im betrachteten Berührungspunkte x^ω . In P_n können die Größen der H_n , abgesehen von einem beliebigen Zahlenfaktor, rein geometrisch gedeutet werden. Die zu H_n gehörige X_n wird mittels nichthomogener Koordinaten ξ^a

($a, b = n+1, \dots, 2n$) beschrieben. Dabei sind ξ^a homogene Funktionen der x^ω vom Grade Null. Wenn in P_n eine Hyperebene w_λ (mit der Normierungsbedingung $w_\lambda x^\lambda = 1$) gegeben ist, so lassen sich die Größen in P_n und in E_n (d. i. in dem lokalen tangierenden Raume von X_n) eineindeutig aufeinander abbilden. — Ist nun v^ν ein beliebiger projektiver Vektor und sind $\Pi_{\lambda\mu}^\nu$ die Koeffizienten der projektiven Konnexion, so ist $dx^\mu \bar{V}_\mu v^\nu$ dann und nur dann ein Vektor, wenn $\Pi_{\mu\lambda}^\nu x^\mu = -A_\lambda^\nu$ ist. Dabei ist A_λ^ν der Einheitsprojektor. Eine Gleichung der Form $dx^\mu \bar{V}_\mu v^\nu = v^\nu d\sigma$ ist dann und nur dann vom \mathfrak{F} unabhängig, wenn die Übertragung eine Punktübertragung ist, d. i. wenn $\Pi_{\mu\lambda}^\nu x^\mu = PA_\lambda^\nu$, wo P ein beliebiger Skalar (vom Grade Null) ist. Wenn außer dem $\Pi_{\mu\lambda}^\nu x^\lambda = q_\mu x^\nu$ (q_μ ein beliebiger Vektor) ist, so heißt die zugehörige Übertragung eine „spezielle Punktübertragung“. Dann und nur dann ist $x^\nu + dx^\nu$ (mit $dx^\nu = -\Pi_{\lambda\mu}^\nu dx^\lambda x^\mu$) zum x^ν proportional. Von der speziellen Punktübertragung lassen sich verschiedene Sätze ableiten, von welchen folgende zwei als Beispiel zitiert werden sollen: „Eine H_n mit einer integrierbaren symmetrischen speziellen Punktübertragung ist eine P_n .“ „Zu einer speziellen Punktübertragung gibt es durch jeden Punkt in jeder Richtung nur eine geodätische Linie.“ — Diese Theorie kann auch auf eine H_m in H_n angewandt werden. Ist $m = n - 1$ und sind y^c ($c, d, e = 0, \dots, m$) die Koordinaten von H_{n-1} , so läßt sich, ausgehend von $B_c^\nu = \partial x^\nu / \partial y^c$ und t_λ (wo t_λ aus der tangierenden Hyperebene der H_{n-1} durch Multiplikation mit einer bestimmten Dichte entsteht), eine projektive Tensordichte $a_{\lambda\mu}$ vom Range $n + 1$ ableiten. Diese wird zuerst bis auf das additive Glied $\sigma t_\lambda t_\mu$ (σ beliebig) bestimmt und ist geometrisch mit dem System der Darboux'schen Quadriken äquivalent. Mit Hilfe von $p_{cde} = B_c^\omega B_d^\mu B_e^\nu V_\mu a_{\mu\lambda}$ (Fubini!) läßt sich aus diesem System die Lie-Čech'sche Quadrik eindeutig auszeichnen. Mittels dieser Quadrik läßt sich die Projektivnormale zur H_{n-1} konstruieren. Diese führt dann in bekannter Weise zur induzierten Konnexion in H_{n-1} . — (Allgemeine Einbettungen samt der Krümmungstheorie für projektive gekrümmte Räume findet man bei Hlavatý, dies. Zbl. 9, 38. Die Konstruktion einer projektiven induzierten Konnexion in einer X_{n-1} in P_n findet sich bei Hlavatý, dies. Zbl. 8, 224. In beiden Arbeiten werden nicht-homogene überzählige Koordinaten benützt.) Hlavatý (Praha).

Mut6, Yosio, and Kentaro Yano: On the connections in X_n associated with the points of Y_m . II. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 1—9 (1936).

(Vgl., auch der Bezeichnung wegen, das Referat über den ersten Teil dieser Arbeit in dies. Zbl. 12, 419.) Dem Vektor V^A ($A, B, C = 1, \dots, m+n$) in Z_{m+n} mit den Komponenten $V^\nu = dx^\nu$, $V^a = dy^a$ können zwei Vektoren mit den Komponenten $(v^\nu, 0, \dots, 0)$, $(0, \dots, 0, v^a)$ nach der Regel

$$v^\nu = V^\nu + I_a^\nu V^a, \quad v^a \equiv V^a \quad (1a)$$

zugeordnet werden. Diese Zerlegung gilt für jeden kontravarianten Vektor. Umgekehrt kann man aus einem Vektor $(v^\nu, 0, \dots, 0)$ in X_n und einem Vektor $(0, \dots, 0, v^a)$ in Y_m einen Vektor V^A in Z_{m+n} nach der Vorschrift

$$V^\nu = v^\nu - I_a^\nu v^a, \quad V^a \equiv v^a \quad (1b)$$

konstruieren. Analoge Betrachtungen gelten auch für kovariante Vektoren. Daraus kann man dann sofort die Regel für die Zerlegung eines allgemeinen Affinors ablesen. Das kovariante Differential δV^A eines Vektors V^A in Z_{m+n} wird, in Übereinstimmung mit (1), folgendermaßen erklärt

$$\delta V^\nu = \overset{X}{\delta} v^\nu - I_a^\nu \overset{Y}{\delta} v^a, \quad \delta V^a = \overset{Y}{\delta} v^a. \quad (2)$$

Dabei sind die Komponenten von V^A den Formeln (1b) zu entnehmen, und δ bzw. $\overset{X}{\delta}$ bzw. $\overset{Y}{\delta}$ bedeutet das Symbol des kovarianten Differentials in X_n bzw. Y_m . — Zieht man die Formeln (2) in eine $\delta V^A = dV^A + \Pi_{BC}^A V^B dx^C$ ($x^a \equiv y^a$)

zusammen, so gibt der Vergleich von (2), (3) eindeutige Relationen für die Π , aus welchen die Krümmungs- und Torsionsgröße in Z_{m+n} in üblicher Weise konstruiert

werden können. Diese Größen können dann nach der obenerwähnten Methode zerlegt werden. *Hlavatý (Praha).*

Sibata, Takasi: On a new definition of vector and parallel displacement in projective differential geometry. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 87—101 (1936).

Jedem Punkte einer X_n (Koordinaten ξ^h , $h = 1, \dots, n$) sei ein N -dimensionaler projektiver Raum P_n mit nichthomogenen Koordinaten X^κ ($\kappa, \dots, \tau = 1, \dots, N$) zugeordnet. Außerdem sei in jeder P_n eine Quadrik $g_{\lambda\kappa} X^\lambda X^\kappa + 2g_\lambda X^\lambda + 1 = 0$ festgelegt. Verf. macht die Voraussetzung, daß jeder Transformation der Koordinaten ξ^h eine projektive Transformation

$$X^{\kappa'} = \frac{T_{\kappa}^{\kappa'} X^\kappa}{1 + T_{\kappa} X^\kappa}$$

in P_n zugeordnet ist. Es wird nun die Summe $C^\kappa = \varphi^\kappa(A^\kappa, B^\kappa, g_\lambda, g_{\lambda\kappa})$ der Punkte A und B definiert. Unter den Voraussetzungen, daß die Funktionen φ^κ analytisch sind, die Addition assoziativ und unabhängig vom Bezugssystem ist, folgt

$$c^\kappa = a^\kappa + b^\kappa; \quad x^\kappa = \frac{X^\kappa}{1 + g_\lambda X^\lambda}$$

(also eine Punktaddition von Möbius; Ref.). Es werden nun Vektoren definiert. Diese Vektoren haben die folgenden Eigenschaften: 1. Die Menge der Vektoren (Bestimmungszahlen v^κ) läßt sich eindeutig auf die Punkte der P_n abbilden, also $v^\kappa = j^\kappa(X^e, g_\lambda, g_{\lambda\kappa})$. 2. Die Summe zweier Vektoren korrespondiert mit der Summe der zugehörigen Punkte. Es stellt sich dann heraus $v^\kappa = \Psi_\lambda^\kappa(g_\lambda, g_{\lambda\kappa}) x^\lambda$, wo die Ψ_λ^κ N willkürliche vom Bezugssystem unabhängige Funktionen sind. Es wird jetzt für diese Vektoren ein Pseudoparallelismus definiert, das reversibel und summenenthaltend sein soll. Als n.u.h. ergibt sich, daß v^κ in ξ^h pseudoparallel zu einem Vektor $v^\kappa - \Gamma_{i\lambda}^\kappa d\xi^i v^\lambda$ in $\xi^h + d\xi^h$ ist. Die Transformation von $\Gamma_{i\lambda}^\kappa$ wird angegeben. *J. Haantjes (Delft).*

Morinaga, Kakutarô: On wave geometry. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 103 bis 114 (1936).

Es wird der Ausdruck für die „mikroskopische Metrik“ $(ds\psi)^A = \gamma_{i:B}^A \psi^B dx^i$ zugrunde gelegt. Die Übertragung soll der Forderung genügen, daß $ds\psi$ bei pseudo-paralleler Verschiebung invariant ist. Dies gibt eine Differentialgleichung für ψ von der Form

$$\gamma_{j:B}^A \partial_i \psi^B = \lambda_{j:i:B}^A \psi^B, \quad (1)$$

die, im Falle λ von ψ unabhängig ist, übergeht in $\partial_j \psi^A = \theta_{j:B}^A \psi^B$ (vgl. dies. Zbl. 12, 232). In dieser Arbeit wird diese Unabhängigkeit nicht angenommen. Es werden dann die Integrabilitätsbedingungen von (1) aufgestellt und für spezielle Fälle näher untersucht.

J. Haantjes (Delft).

Topologie:

● **König, Dénes:** Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe. (Math. u. ihre Anwendung in Monogr. u. Lehrbüchern. Begr. v. E. Hilb. Hrsg. v. E. Artin. Bd. 16.) Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1936. XI, 258 S. u. 107 Fig. RM. 16.—

A thorough monograph, containing much classical information, with extensions by the author—particularly to infinite graphs. Many interesting applications to puzzles, games, and abstract sets, but little attempt to reconcile concepts and terms with those used in the modern theory of n -complexes. Summary by chapters: fundamental notions of graphs (1); unicursal (2) and labyrinth (3) problems; trees (4, 5); questions special to infinite graphs (6); bases for vertices and edges of oriented graphs (7); applications to logic, games of position, e. g. chess, and group diagrams (8); linear forms in edges [= 1-chains], cycles, starforms [= duals of bounding cycles] (9), and the same mod 2 (10); factorization (11), particularly graphs of third degree with their relation to four-color problem (12), and extensions to infinite graphs (13); questions of separation, applications to determinants (14). Copious references to sources; good bibliography.

A. W. Tucker (Princeton).

Bassi, Achille: Su alcuni modelli topologici del Poincaré. Mem. Accad. Ital. 6, 1309—1333 (1935).

Es wird bewiesen: Die ungeordneten Punktepaaire einer Mannigfaltigkeit V von der Dimension $k > 2$ bilden eine verallgemeinerte Mannigfaltigkeit von der Spezies $k + 1$ und keiner niedrigeren. Aus diesem Satze folgt, daß von Poincaré [J. École polytechn. (2) 1, 88—89, 8. Beisp. (1895)] gegebene Beispiele keine Mannigfaltigkeiten, sondern nur verallgemeinerte Mannigfaltigkeiten darstellen und die dort gegebene Berechnung der Bettischen Zahlen nicht zu Recht besteht. Das ist interessant, weil nach den Resultaten einer früheren Arbeit [Mem. R. Accad. Italia 6 (1935); dies. Zbl. 11, 370] des Verf. diese Systeme von Bettischen Zahlen gerade die einzigen sind, für die es noch keine Entscheidung über die Existenz zugehöriger orientierbarer Mannigfaltigkeiten gibt.

Friedrich Levi (Calcutta).

Komatu, Atuo: Über indikatrixumkehrende Abbildung. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 523—527 (1935).

Eine im Sinne von H. Hopf orientierbare stetige Abbildung einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit auf eine andere heißt indikatrixumkehrend, wenn es wenigstens einen die Orientierung umkehrenden geschlossenen Weg im Bild bzw. Urbild gibt, dessen Urbild bzw. Bild die Orientierung erhält und doch nicht zusammenziehbar ist. Dann wird der Satz bewiesen: Der Absolutgrad einer indikatrixumkehrenden überall kompakten Abbildung ist stets Null.

H. Seifert (Heidelberg).

Hurewicz, W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen. III. Klassen und Homologietypen von Abbildungen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 117—126 (1936).

Fortführung der Untersuchungen über die Beziehung zwischen den Homologie- und Homotopieeigenschaften von Räumen und Abbildungen (vgl. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 112 u. 521; dies. Zbl. 10, 378 u. 11, 371). X und Y seien kompakte Räume, $\beta_n(X, \mathfrak{U})$ und $\beta_n(Y, \mathfrak{U})$ die mit Hilfe einer abelschen Gruppe \mathfrak{U} als Koeffizientenbereich gebildeten Homologiegruppen. Jede stetige Abbildung f von X in Y bewirkt dann bekanntlich eine homomorphe Abbildung $H^n_{f, \mathfrak{U}}$ der Gruppe $\beta_n(X, \mathfrak{U})$ in die Gruppe $\beta_n(Y, \mathfrak{U})$. Es kann nun sein, daß bei zwei gegebenen Abbildungen f und g von X in Y die Homomorphismen $H^n_{f, \mathfrak{U}}$ und $H^n_{g, \mathfrak{U}}$ für jedes n und für jede abelsche Gruppe \mathfrak{U} übereinstimmen. Alsdann werden f und g zum gleichen Homologietypus gerechnet. Der Einteilung der Abbildungen nach Homologietypen wird die Brouwersche Einteilung in Klassen einander homotoper Abbildungen gegenübergestellt. Offenbar haben Abbildungen der gleichen Brouwerschen Abbildungsklasse denselben Homologietypus. Die Umkehrung dieses Satzes wurde von H. Hopf für den Fall bewiesen, daß X ein n -dimensionaler Komplex, Y die n -Sphäre ist. Dieser Hopfsche Satz wird nun von Verf. auf zwei kompakte Räume X und Y mit den folgenden Eigenschaften erweitert: X ist n -dimensional (n endlich und ≥ 2); Y ist lokal zusammenhängend bis zur Ordnung n (einschließlich) im Lefschetzschen Sinne; die Fundamentalgruppe sowie die Homologiegruppen (mit ganzzahligem Koeffizientenbereich) der Dimensionen 0 bis $n - 1$ sind leer. — Weiter werden die Fälle untersucht, in denen Y überdies torsionsfrei in der Dimension n bzw. die n -Sphäre ist. Die Arbeit schließt mit einer Betrachtung über den Homotopietypus zweier kompakter Räume X und Y . X und Y werden zum gleichen Homotopietypus gerechnet, wenn es eine stetige Abbildung f von X in Y und eine stetige Abbildung φ von Y in X gibt, so daß φf und $f\varphi$ den identischen Abbildungen homotop sind.

H. Seifert (Heidelberg).

Astronomie und Astrophysik.

Seonzo, Pasquale: Sul tentativo di spiegare l'avanzo del perielio di Mercurio mediante l'ipotesi di un anello di pianetini intramercuriali. Mem. Soc. astron. Ital., N. s. 9, 155 bis 168 (1936).

Ammeßa l'ipotesi dell'esistenza di un anello di pianetini, compreso tra il Sole

e Mercurio, si sviluppano le formule per la valutazione dell'azione perturbatrice di detto anello, tendente a spostare il perielio ed il nodo dell'orbita del pianeta Mercurio. Segue una breve discussione critica dell'ipotesi stessa, basata sopra i dati della valutazione numerica della perturbazione. *Autoreferat.*

Rakowiecki, Tadeusz: *Mouvement élémentaire des planètes.* Wiadom. mat. 41, 95—122 u. franz. Zusammenfassung 122—126 (1936) [Polnisch].

Kopal, Zdeněk: *A few remarks on the dynamical tidal theory of the solar system.* Astron. Nachr. 258, 381—384 (1936).

Kopal, Zdeněk: *Further remarks on the dynamical tidal theory of the solar system.* Astron. Nachr. 258, 383—384 (1936).

Kopal, Zdeněk: *Über die periodischen Korrektionsglieder der Elemente von Bedeckungsveränderlichen und ihre physikalische Deutung.* Astron. Nachr. 258, 393 bis 396 (1936).

● **Handbuch der Astrophysik.** Hrsg. v. G. Eberhard, A. Kohlshütter und H. Ludendorff. Bd. 7. Erg.-Bd. Berücksichtigend die Literatur bis Ende 1934 nebst einem Generalregister des Gesamtwerkes. Berlin: Julius Springer 1936. IX, 755 S. u. 110 Abb. RM. 126.—.

Rabe, W.: Doppelsterne. S. 685—720.

Ergänzung zum Artikel „Double and Multiple Stars“ von F. C. Henroteau in Band VI Teil II des Handbuches der Astrophysik (erschienen 1928). Nach der Vorbemerkung mußte wegen der Fülle des Stoffes auf die Darstellung der Einzelsysteme, auf die Anführung der Neuentdeckungen der Bedeckungsveränderlichen und die Zusammenstellung der Systemkonstanten der Bedeckungsveränderlichen verzichtet werden.

G. Schrutka (Wien).

Schelling, H. von: *Zur Evolution der Doppelsternbahnen.* Astron. Nachr. 258, 369—376 (1936).

Verf. integriert das Problem der Doppelsternbewegung bei abnehmender Masse unter Annahme des Gesetzes $\frac{dm}{dt} = -\alpha m^3$ (m Gesamtmasse) und diskutiert die verschiedenen hierbei möglichen Fälle. Neben den bisher betrachteten Fällen mit unendlich vielen Apsiden betrachtet er Bahnen, bei denen höchstens 2 Apsiden auftreten können (eine Art Spiralbahnen). Für diese Bahnen ergibt sich zwischen e und U die Beziehung $e^2 = a + b/\overline{U}$. Diese Beziehung prüft er am Beobachtungsmaterial. Er meint, daß bei langperiodischen Doppelsternen, bei denen man nur ein ganz kleines Bahnstück beobachtet hat, solche Bahnen vielleicht möglich sind. *G. Schrutka.*

● **Tierey, Georges:** *L'équilibre radiatif dans les étoiles.* Paris: Gauthier-Villars 1935. 464 pag. et 32 fig. Frs. 100.—.

Tierey, G.: *Conservation du caractère polytropique de l'équilibre thermodynamique dans l'hypothèse de θ variable ou β variable.* C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 17) 52, 194—198 (1935).

Investigation of the conditions under which the general differential equation giving the density as a function of the radius vector, reduces to an equation of the Emden type.

Steensholt (Bergen).

Tierey, G.: *Les lois de variation de θ et de β dans un équilibre polytropique de classe quelconque.* C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 17) 52, 247—249 (1935).

Proof that the two ways of expressing the condition for the conservation of polytropic character are equivalent.

Steensholt (Bergen).

Biermann, L.: *Über Sternmodelle mit der Energieerzeugung $\varepsilon \propto T$.* Astron. Nachr. 258, 257—264 (1936).

Verf. untersucht durch numerische Integration das Sternmodell $\varepsilon = \varepsilon_1 T$ (ε = subatomare Energieerzeugung pro Gramm Sternmaterie, ε_1 = Proportionalitätskonstante),

wo der Strahlungsdruck als klein gegen den Gasdruck angenommen wird und das Kramerssche Opazitätsgesetz $k = k_1 \rho T^{-3.5}$ zur Benutzung kommt. Als den hauptsächlichsten Vorteil dieses Modells betrachtet der Verf., daß diejenige Lösung, welche ohne Konvektion auf eine Photosphäre führt, näherungsweise gut durch eine Polytrope $n = 3$ dargestellt werden kann. Bei Voraussetzung von festen Mittelpunkts-
werten von Temperatur und Dichte tritt bei großem Wert von ε_1 in den äußeren Teilen des Sternes, wo $r > \frac{1}{4} R$ bzw. $\gamma > \frac{1}{4} R$, Konvektion auf. Die Vergleichung der integrierten Lösungen mit Grenzmodellen zeigt, daß bei gegebenen Werten von Masse und Radius der Grad der Konvektion mit der Leuchtkraft wächst, und zwar so lange, bis die Konvektion den ganzen Stern beherrscht und dieser thermisch instabil wird. Weiter gibt der Verf. Lösungen für vorgegebene Masse und festes ε_1 an, bei variabler relativer Ausdehnung des konvektiven Bereichs und variabler Leuchtkraft. *Slouka.*

Kluyver, H. A.: On the extension of the theory of adiabatic cepheid pulsation. *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **7**, 313—323 (1936).

This is a continuation of previous work by J. Woltjer (this Zbl. **11**, 84) and the author (this Zbl. **11**, 85). Second order terms in the adiabatic pulsation are investigated in the critical case of approximate commensurability of two characteristic frequencies. The case considered in detail is that where $3-4/\gamma = 0.4$, which makes the first and third characteristic frequencies approximately commensurable, γ being the ratio of the specific heats. Details of the solution, and tables of the results, are given; the paper itself should be consulted for these. The results are compared with data from the radial velocity of RR Lyrae. This shows two periodicities, and the one of longer period is here interpreted as an interference between the first and third characteristic oscillations. The theoretical velocity curve is then shown to fit the observations. It is further shown that the third oscillation may also have a direct observable effect on the radial velocity.

W. H. McCrea (London).

Cowling, T. G.: Remarks on L. Biermann's paper „Konvektion im Innern der Sterne“. *Astron. Nachr.* **258**, 133—134 (1936).

The author criticises Biermann's treatment of the boundary conditions (this Zbl. **12**, 425), and shows that, when these are correctly used, convection exists in the outer layers of a star only if conditions obtain like those of Unsöld's unstable layer in the sun. He further points out that even then the presence of convection does not increase the number of possible configurations, in the manner suggested by Biermann.

W. H. McCrea (London).

Cowling, T. G.: The stability of gaseous stars. II. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 42—60 (1935).

This paper studies the effect on the stability of gaseous stars of convection, which was explicitly neglected in the author's first paper (this Zbl. **9**, 415). The methods developed by meteorologists for the mathematical treatment of turbulent convection, in which it is supposed that masses of gas are continually separating themselves from the surrounding material and being re-absorbed by it after moving bodily through a certain distance, are outlined. Then the general hydrodynamical equations of viscous flow of a gas, including the equation of thermal energy, are written down. These are then averaged so as to give the macroscopic behaviour of the gas when turbulence, of the sort contemplated, is present. A number of approximations, valid for the application of these equations to the stellar problem, are introduced. The "equilibrium" configuration of the star, when it possesses a central convective zone, is examined, and estimates of the velocity and free path of the convective elements are made. It appears that the divergence from adiabatic equilibrium is slight. By methods similar to those of the previous paper, the author goes on to consider small oscillations about the position of equilibrium, and obtains a condition of stability. The general conclusion is that turbulence increases the stability of a star. There is stability unless the ratio of the specific heats γ is nearly equal to $4/3$, or the rate of

energy-generation ε increases very rapidly with temperature T . It is estimated, for example, that if $\varepsilon \propto T^{20}$ there is stability unless $\gamma < 1.44$. This removes a well known difficulty in the theory of gaseous stars, and strengthens the belief that most stars are gaseous throughout; but it requires that if ε increases very rapidly with T then energy transfer in the stellar interior takes place mainly by convection. The bearing of the work on Cepheid pulsation is touched upon. Some mathematical and numerical details are given in an appendix.

W. H. McCrea (London).

Tuominen, Jaakko: A note on convectional instability in stars. *Z. Astrophys.* **11**, 260—261 (1936).

The author states the theorem: If a star is in hydrostatic (and not convective) equilibrium, and if $\varepsilon \propto \rho^m T^n$, $\kappa \propto \rho^r T^{-s}$, in the usual notation, together with certain other simplifying assumptions, then a necessary and sufficient condition for the existence of a density minimum at the centre of the star, is $3n - 5s > 15\beta_{\text{centre}}$, provided $3(3m + n) + 5(3r - s) > 0$. The proof is promised in a subsequent paper.

W. H. McCrea (London).

Barbier, Daniel, et Victor Maitre: Méthode nouvelle pour l'étude de l'absorption de la lumière dans l'espace interstellaire. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **201**, 1170—1172 (1935).

Obgleich die beobachteten Farbexzesse der B -Sterne mit der Entfernung r stärker korreliert sind als mit der Leuchtkraft M [Dufay und Liau, *C. R. Acad. Sci.*, Paris **196**, 1372 (1933)], scheint ein strenger Nachweis des Ursprungs der Rötung erwünscht. Zu diesem Zweck wird ein statistisches Verfahren vorgeschlagen; die Sternzahl $N(m, E)$ ist in ihrer Abhängigkeit von scheinbarer Helligkeit m und Farbexzeß E für den allgemeinen Fall $E = \varphi(r) + \psi(M)$ zu untersuchen. Für die Extremfälle $\varphi(r) \equiv 0$ und $\psi(M) \equiv 0$ ergeben sich einfache Verhältnisse, die aber mit den Beobachtungen [Stebbins und Huffer, *Publ. Washburn Observ.* **15**, 217 (1934)] nicht im Einklang sind.

Wempe (Heidelberg).

Wang, Shih-Ky: Diffusion de la lumière stellaire. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **202**, 284—286 (1936).

Zur Erklärung der Helligkeit des Nachthimmels hatte Verf. in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **13**, 134) das Milchstraßensystem durch eine gleichförmig von Sternen und diffundierender Materie erfüllte Platte angenähert dargestellt. Diesmal wird angenommen, daß die Verteilungsdichte der Sterne senkrecht zur Platte von der Mitte aus exponentiell abfällt. Die Integralgleichung für die Helligkeitsverteilung ändert sich dadurch nur im absoluten Gliede. Sie kann jedoch diesmal mit Hilfe von Fourierintegralen explizit gelöst werden. Bestimmt man wieder wie vorher die in der Gleichung auftretenden unbekannten Konstanten aus den Resultaten der Sternabzählungen, so zeigt eine numerische Durchrechnung, daß die von der Streuung herrührende Helligkeit bis zu zwei Dritteln der Sternstrahlung betragen kann.

E. Hopf (Watertown).

Parvulesco, Const.: Sur l'unification des cartes de distributions galactiques et sur le meilleur système de projection à adopter. *Bul. fac. şti. Cernăuţi* **9**, 33—46 (1935).

The paper is a record of a communication presented by the author to the Fifth Congress of the International Astronomical Union held in Paris, July, 1935. The question on the construction of charts of the celestial sphere best adapted for purposes of stellar statistics is considered. It is stated that the principal requirement to which such charts have to answer is the conservation of areas but, besides, the deformations of angles and lengths must be reduced to minimum. Of all projections representing the hemisphere in the area of a circle that of Lambert proves to suit best to these requirements, while the Hammer-Aitkoff's one is superior to all other projections representing the whole sphere in an area limited by a single contour. Instructions and numerical tables are given for an easy construction of these charts. The paper is supplemented by Lambert charts of the distribution of stars of different apparent magnitudes and spectral types, of globular clusters, variable stars, dark and bright nebulae, of planetary nebulae and of novae.

Kyrill Ogrodnikoff (Poulkovo).

Parvulesco, Const.: La voie-lactée est un phénomène local, incompatible avec l'hypothèse super-galactique. *Bul. fac. ști. Cernăuți* 9, 22—32 (1935).

Ambarzumian, V.: On the derivation of the frequency function of space velocities of the stars from the observed radial velocities. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 96, 172—179 (1936).

Das mathematische Problem, allein aus der als gegeben anzusehenden, vom Ort an der Sphäre abhängigen Verteilungsfunktion der Radialgeschwindigkeiten die Verteilungsfunktion der wahren Raumgeschwindigkeiten zu bestimmen, führt auf eine Integralgleichung, deren Lösung angegeben wird. Dabei werden der ebene und der räumliche Fall behandelt. Praktische Anwendungen werden in Aussicht gestellt.

Straßl (Göttingen).

Relativitätstheorie.

● **Robb, Alfred A.:** *Geometry of time and space.* Cambridge: Univ. press 1936. VII, 408 pag. a. 57 fig. bound 21/-.

This book is essentially a second edition of the author's *Theory of Time and Space* (1914), with a new and amplified introductory chapter and with the proofs of some of the theorems made simpler. It is devoted to a logical development of the geometry of Minkowski space, worked out in a sequence of postulates and propositions after the manner of Euclid and Newton. In the introduction is a description of the essential differences between Minkowski and four-dimensional Euclidean geometry, a short account of the experiments which led to the formulation of special relativity, and a discussion of the logical foundations of the latter theory. The author is careful to avoid assumptions as to the simultaneity of events in different places, and bases his theory on the idea of "conical order"; that is, he begins by postulating that there is at least one element (event) which is before any given element A , at least one which is after A , and at least one (distinct from A) which is neither before nor after A . This gives the separation of lines in the four-dimensional world into three classes, namely time-like, space-like, and null. The author does not actually use these terms, but employs a terminology of his own. The main body of the book consists of a series of over 200 theorems and interspersed remarks, which establish the properties of geometrical configurations in Minkowski space. The treatment is non-analytic except in the last twenty or thirty pages.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Esclangon, Ernest: *Sur les formules de Lorentz et le principe de la relativité.* C. R. Acad. Sci., Paris 202, 708—712 (1936).

The constancy of the velocity of light has no essential place in the principle of relativity, and need not be assumed in order to establish the Lorentz transformation or the other formulae of the special theory. It is necessary only to assume the "reciprocity" of isotropic systems of reference S, S' in uniform relative motion; that is, that natural phenomena under the same relative initial conditions in S, S' appear identical and run identical courses.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Le Roy, Édouard: *Sur les formules de Lorentz.* C. R. Acad. Sci., Paris 202, 794—795 (1936).

Referring to a paper on the same subject by E. Esclangon (see above abstract), the author points out that the possibility of obtaining the Lorentz transformation without assumptions concerning the velocity of light was established by him in an earlier paper [*Jubilé de M. Marcel Brillouin* 1 (1935)]. He then gives a brief deduction of the same result, and remarks that it is not absolutely necessary to identify the constant c which appears in the formulae with the velocity of light, so that the Lorentz transformation could be retained even if certain variations in that velocity were verified experimentally.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Levi-Civita, T.: *Le problème des deux corps en relativité générale.* *Enseignement Math.* 34, 149—175 (1935).

This paper is a report of a lecture delivered in April, 1935, under the auspices of the University of Geneva. It contains a discussion of the circumstances in which the two-body problem in general relativity may be reduced to that of finding the

approximate motion of the centres of gravity of the two bodies. After discussing certain significant differences between this and the corresponding Newtonian problem, the author gives a carefully reasoned statement of the assumptions upon which his approximate methods are based. He takes the metric in the form $ds^2 = ds_0^2 - 2\gamma_{ij}dx^i dx^j$, where ds_0 is the galileian line-element and the γ_{ij} are small, and neglects quantities which are small compared with v^2/c^2 , where v is the velocity of either of the bodies relative to the approximately galileian system of reference. (For the solar system the order of magnitude of v^2/c^2 is roughly 10^{-8} .) He arrives finally at the Lagrangian function and consequent differential equations for the motion of the centres of gravity of the two bodies. Most of the mathematical details are omitted, but the author promises to give an account of the detailed calculations elsewhere. He concludes by stating that his work leads to a formula for the displacement of perihelion of a planet whose mass is not negligible compared with that of the central body, a formula which, he hopes, may be verifiable experimentally by observations on double stars.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Garcia, Godofredo: Lois du mouvement planétaire Einsteinien dans un milieu résistant. Bull. Soc. Math. Grèce **16**, 169—187 (1935).

A further development of work begun in two earlier papers (this Zbl. **10**, 89, 186).

H. S. Ruse (Edinburgh).

Page, Leigh: A new relativity. I. Fundamental principles and transformations between accelerated systems. Physic. Rev., II. s. **49**, 254—268 (1936).

This paper contains an approach to relativity on the lines of the recent work of E. A. Milne (this Zbl. **11**, 279), to whom the author makes due acknowledgments, but with whom he does not entirely agree. He believes, for example, that Milne's definition of equivalence is unsatisfactory because it implicitly involves synchronism, and states that he does not share Milne's apparent belief that physical geometry is conventional. His own theory is based upon definitions (unfortunately too long to give here) of equivalent particle-observers and equivalent systems of reference, and he shows that the Euclidean inertial systems of special relativity are equivalent in his sense, the transformations connecting such systems being those of Lorentz. The result upon which he lays most stress is that there exist equivalent Euclidean reference-systems with constant light velocity which have constant relative accelerations. This leads him to the final conclusion that, in an effectively empty world, Einstein's assumption of an invariant physical interval and an absolute four-dimensional space-time is incompatible with the underlying principle of the relativity of motion, and that therefore either the one or the other must be abandoned.

H. S. Ruse.

Dupont, Yvonne: La force et le couple électromagnétiques dans un champ gravifique. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **22**, 209—214 (1936).

Link, F.: Sur les conséquences photométriques de la déviation d'Einstein. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 917—919 (1936).

Quantentheorie.

Guye, Ch.-Eug.: Les frontières de la physique et de la biologie. III. Arch. Sci. Physiques etc. **18**, 5—20 (1936).

I., II. voir ce Zbl. **12**, 146.

● **Handbuch der Astrophysik.** Hrsg. v. G. Eberhard, A. Kohlschütter und H. Ludendorff. Bd. 7. Erg.-Bd. Berücksichtigend die Literatur bis Ende 1934 nebst einem Generalregister des Gesamtwerkes. Berlin: Julius Springer 1936. IX, 755 S. u. 110 Abb. RM. 126.—

Rosseland, S.: The principles of quantum theory. S. 243—249.

Kurzer Bericht über die Fortschritte der Quantentheorie seit 1927. — Inhalt: Diracsche relativistische Wellengleichung des Elektrons, Sommerfeldsche Feinstruktur-

formel, Klein-Nishina-Formel (Intensität der Comptonstreuung), das Positron, das Neutron, Eddingtons Spekulationen über den Zusammenhang der atomphysikalischen und kosmologischen Grundkonstanten, Dispersionstheorie (Hinweis auf ein astrophysikalisch dringliches Problem), Feldtheorie.

P. Jordan (Rostock).

Jordan, P.: Über die Wechselwirkung von Spinorteilchen. *Z. Physik* **98**, 709 bis 713 (1936).

Auf Grund der Neutrinotheorie des Lichts wird die Vermutung ausgesprochen, daß die Wechselwirkung zwischen Licht und Elektronen und die Wechselwirkung zwischen Neutronen, Protonen, Elektronen und Neutrinos, die nach Fermi für die α -Emission verantwortlich ist, verschiedene Spezialfälle eines allgemeinen Wechselwirkungsgesetzes bilden, worin ein Produkt von vier Spinorwellenfunktionen auftreten soll. Auf Grund der hierdurch vertieften Analogie zwischen α - und γ -Emission wird geschlossen, daß bei α -Prozessen, wo das Elektron eine große Energie bekommt, dasselbe in die gleiche Richtung wie das Neutrino geschleudert wird.

O. Klein.

Jordan, P.: Lichtquant und Neutrino. *Z. Physik* **98**, 759—767 (1936).

Durch Einführung von positiven und negativen Neutrinos in Analogie zu den positiven und negativen Elektronen wird ein von Kronig abgeleiteter Satz (dies. Zbl. **12**, 429) dahin gedeutet, daß die „Neutrinoladung“ (d. h. der Unterschied der Anzahlen der positiven und negativen Neutrinos) bei Lichtprozessen erhalten bleibt. Im Anschluß an eine frühere Arbeit von Jordan (dies. Zbl. **11**, 138) werden alle Lichtprozesse auf Neutrinoreaktionen zurückgeführt und ihre Thermodynamik näher diskutiert.

O. Klein (Stockholm).

Jordan, P.: Zur Herleitung der Vertauschungsregeln in der Neutrinotheorie des Lichtes. *Z. Physik* **99**, 109—113 (1936).

Es werden einige Konvergenzschwierigkeiten bei der vom selben Verfasser früher (dies. Zbl. **11**, 138) gegebenen Zuordnung von Lichtquantenfeldern zu Neutrino-feldern durch Einführung von diskreten Eigenfrequenzen erläutert.

O. Klein.

Kronig, R. de L.: The neutrino theory of radiation and the emission of β -rays. *Nature* **137**, 149 (1936).

Es wird darauf hingewiesen, daß die bisher zur Erklärung der β -Strahlung vorgeschlagenen Ausdrücke für die Wechselwirkung der schweren und leichten Teilchen nicht zu strahlungslosen Neutrino-feldern (vgl. dies. Zbl. **12**, 182) führen, wie sie der Abwesenheit von γ -Strahlung entsprechen würden. Im Gegenteil dürfte die Forderung der Strahlungslosigkeit als einschränkende Bedingung bei der Festlegung dieser Wechselwirkungsenergie zu benutzen sein.

O. Klein (Stockholm).

Destouches, Jean-Louis: Propriétés du spin d'un système de corpuscules. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 387—389 (1936).

Es werden die Eigenschaften des Spins bei einem zusammengesetzten System in einer relativistischen Quantenmechanik betrachtet.

O. Klein (Stockholm).

Hirsch, R. v.: Quantenschwankungen. *Ann. Physik*, V. F. **25**, 697—704 (1936).

Erörterungen über die Möglichkeit, Strahlungstemperaturen aus den Schwankungen der Lichtquantenzahl zu messen, und über ein absolutes Temperaturmaß.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin).

Kakinuma, Usaku: On the structure of the electron and positron. *Sci. Pap. Inst. Physic. Chem. Res.* **28**, 249—270 (1936).

Zusammenfassung und Vereinfachung der früheren (ausführlich zitierten) Arbeiten des Verf. über spekulative Untersuchungen, von denen eine Aufklärung über das Wesen des Elektrons, der Quantenerscheinungen usw. erhofft wird.

P. Jordan (Rostock).

Flint, H. T.: A limit to the quantum theory and the avoidance of negative energy transitions. *Nature* **137**, 313—314 (1936).

Verf. möchte durch eine Verschärfung der quantenmechanischen Ungenauigkeitsregeln die Fälle, in welchen die Diracsche Theorie einen Übergang eines Elektrons aus einem Zustand positiver Energie in einen negativer Energie ergibt, als außerhalb

des Gültigkeitsbereiches der Quantentheorie liegend erweisen. Auf die positive, wichtige Beziehung dieser Übergangsprozesse zur Theorie des Positrons wird dabei keinerlei Rücksicht genommen.

P. Jordan (Rostock).

Born, Max: Unitary theory of field and matter. I. Classical treatment. Charged particle with magnetic rest-moment. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 3, 8—24 (1936).

Die Auffassung der Elektronen als Feldsingularitäten bedingt bekanntlich die Möglichkeit und Notwendigkeit, die Bewegungsgleichungen der Elektronen als Folgerungen der Feldgleichungen herzuleiten. Die Arbeit bringt einen Beitrag hierzu; dabei wird allerdings die Lagrangefunktion des Problems als aus zwei Summanden bestehend angenommen, deren erster sich auf das im dreidimensionalen Raume ausgebreitete Feld und deren zweiter sich auf den Ort der fraglichen Singularität bezieht. Einführung der Diracschen δ -Funktion ermöglicht es, im Variationsproblem das eindimensionale Integral dem vierdimensionalen anzuschließen:

$$\iiint \{L(f_{kl}) + l(\Phi_k, f_{kl}) \delta\} dx dy dz dt \rightarrow \text{Extremum}; \quad f_{kl} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^k}. \quad (1)$$

Der auf die Singularität bezügliche Anteil l kann die Φ_k explizit enthalten, ohne daß die früher bei Mie aus dem expliziten Auftreten der Φ_k in L entstandenen Schwierigkeiten sich wiederholen. Mit den Bezeichnungen

$$p^{kl} = \frac{\partial L}{\partial f_{kl}}; \quad q_k = \frac{\partial l}{\partial \Phi_k}; \quad m^{kl} = \frac{\partial l}{\partial f_{kl}} \quad (2)$$

wird

$$\frac{\partial p^{kl}}{\partial x^i} = q^k \delta - \frac{\partial m^{kl} \delta}{\partial x^i}, \quad (3)$$

woraus

$$\frac{\partial q^k \delta}{\partial x^k} = 0 \quad (4)$$

folgt. Die ausführliche Diskussion von (3) unter Beachtung der an der Singularität innezuhaltenden Randbedingungen ergibt dann für das Elektron genau diejenigen Bewegungsgleichungen, welche Kramers kürzlich für ein klassisches mit Spin versehenes Elektron aufgestellt hat.

P. Jordan (Rostock).

Born, M.: On the linearization of the energy density of the electromagnetic field. Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 102—107 (1936).

In der Bornschen Elektrodynamik hat die Energiedichte U die irrationale Form

$$U = \sqrt{1 + \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2} - 1; \quad \mathfrak{C} = [\mathfrak{D}, \mathfrak{B}].$$

Es wird der Gedanke skizziert, diese Quadratwurzel zu linearisieren mit demselben Verfahren, welches Dirac zur Linearisierung der Beziehung $p_k p^k + m^2 c^2 = 0$ angewandt hat, durch Einführung der bekannten Matrizen α_k , welche $\alpha_k p^k + i m c = 0$ zu schreiben erlauben. Man setze nämlich

$$\begin{aligned} a = \alpha_0; \quad \mathfrak{d}_x = \alpha_1, \quad \mathfrak{d}_y = \alpha_2, \quad \mathfrak{d}_z = \alpha_3; \\ \mathfrak{b}_x = i \alpha_0 \alpha_1, \quad \mathfrak{b}_y = i \alpha_0 \alpha_2, \quad \mathfrak{b}_z = i \alpha_0 \alpha_3; \\ \mathfrak{s}_x = i \alpha_2 \alpha_3, \quad \mathfrak{s}_y = i \alpha_3 \alpha_1, \quad \mathfrak{s}_z = i \alpha_1 \alpha_2; \end{aligned}$$

dann kann man die Energiedichte linearisieren:

$$u = a + \mathfrak{d} \mathfrak{D} + \mathfrak{b} \mathfrak{B} + \mathfrak{s} \mathfrak{C}.$$

Die Durchführung dieser Idee führt zu einer Reihe noch der Untersuchung bedürftiger Fragen.

P. Jordan (Rostock).

Infeld, L.: The new action function and the unitary field theory. Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 127—137 (1936).

1. Es wird eine neue Form entwickelt für das Variationsprinzip, welches die elektromagnetischen Feldgleichungen liefert. Statt der Lagrangefunktion L oder der Hamiltonfunktion H tritt deren Summe T auf: Sei

$$F = \frac{1}{2} f_{kl} f^{kl}; \quad p^{kl} = \frac{\partial L}{\partial f_{kl}}; \quad P = \frac{1}{2} p_{kl} p^{kl};$$

dann ist $T = L(F) + H(P)$. Diese Betrachtungsweise führt zu einem vertieften Verständnis der eigentümlichen Schrödingerschen Form der Bornschen Elektrodynamik. — 2. In der Maxwellschen Theorie $L = F$ ist $T = \frac{1}{2}(F + P)$, und hat den Wert Null. In der Bornschen Theorie $(L + 1)^2 = F + 1$ ist

$$T = \frac{F - P}{R} - 2; \quad R = \frac{1}{2} f_{kl} p^{kl}.$$

dabei besteht Symmetrie zwischen elektrischem und magnetischem Feld (Schrödingersche „ γ -Transformation“). Verf. diskutiert den weiteren Fall

$$T = \log\left(-\frac{F}{P}\right) - \frac{F + P}{R}.$$

Bei diesem existieren a) keine isolierten Magnetpole, aber b) zwei Arten elektrischer Ladungen, eine mit endlicher und eine mit unendlicher Energie. *Jordan* (Rostock).

Schubin, S., und A. Smirnow: Ein einfaches Beispiel aus der Bornschen Elektrodynamik. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 69—72 (1936).

Wie wird in der Bornschen nichtlinearen Elektrodynamik eine ebene Lichtwelle beeinflusst durch das Vorhandensein eines (schwachen) homogenen elektrischen Feldes \mathfrak{E}_0 ? Anschaulich interpretiert verhalten sich die Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{B} so wie in einem einachsigen Kristall, dessen Hauptdielektrizitätskonstanten gleich

$$1; \quad 1; \quad 1 + \frac{\mathfrak{E}_0^2}{b^2}$$

sind; b ist das „kritische Feld“ der Bornschen Theorie. Dabei verhalten sich jedoch die Vektoren \mathfrak{D} , \mathfrak{H} derart, daß der Poyntingsche Vektor (anders als beim Kristall) die Richtung der Wellennormalen behält. — Durchgang einer Welle durch einen Kondensator ergibt eine gewisse kleine Phasenänderung. *P. Jordan* (Rostock).

Bohr, Niels: Neutron capture and nuclear constitution. Nature 137, 344—348 u. Naturwiss. 24, 241—245 (1936).

Die Größe der Wechselwirkung zwischen Kernbausteinen und stoßenden Neutronen spricht gegen die Behandlung des Neutronenstoßes als Einkörperproblem in einem festen Potentialfeld. Da sich vielmehr die Energie des stoßenden Neutrons alsbald gleichmäßig auf die Kernbausteine verteilen wird, kann eine Reemission erst erfolgen, wenn der Betrag sich durch Zufall wieder auf ein Neutron konzentriert. Diese Vorstellung erklärt die lange Lebensdauer des durch Einfangung entstehenden angeregten Kerns und damit die Tatsache, daß die Wirkungsquerschnitte für Einfangung unter nachträglicher γ -Emission trotz der geringen γ -Übergangswahrscheinlichkeit zum Teil größer sind als die für elastische Streuung (d. h. Reemission) sowie die Schärfe der hierbei beobachteten Resonanzen. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin).

Elsasser, W. M.: La structure des noyaux atomiques complexes. Ann. Inst. H. Poincaré 5, 223—262 (1935).

Zusammenfassender Bericht über ältere Arbeiten des Verf. *C. F. v. Weizsäcker*.

Feenberg, Eugene: Does the alpha-particle possess excited states? Physic. Rev., II. s. 49, 328—331 (1936).

Nachdem neuere Experimente Anregungsstufen des α -Teilchens zu erfassen scheinen, untersucht Verf. die Frage der ersten Anregungsstufe des α -Teilchens vom Standpunkte der von ihm und anderen Verfassern ausgeführten Modelltheorie des α -Teilchens; mit dem Ergebnis, daß ein stabiles Singulett- $2p$ -Niveau existieren muß, falls die Kernbindungskräfte noch in Abständen von mehr als $2,0 \cdot 10^{-13}$ cm merklich sind, was wahrscheinlich der Fall ist. Die Anregungsenergie $h\nu_0$ darf $40 mc^2$ (m = Elektronenmasse) nicht überschreiten, da sonst Zerfall in H^3 und H^1 einträte; die Breite des Niveaus berechnet Verf. zu

$$\Delta E < 2,6 \cdot 10^{-6} \frac{(h\nu_0)^2}{mc^2},$$

also $\Delta E < 1300$ Elektronvolt, wenn $h\nu_0$ (entsprechend experimentellen Daten) gleich $32 mc^2$ angenommen wird. — Die Untersuchung arbeitet, da eine exakte Berechnung

der Anregungsniveaus ziemlich aussichtslos wäre, mit Ungleichungen, die sich aus den Summenregeln ergeben. Jedoch muß auch hierbei die Austausch-Natur der Kernbindungskräfte unberücksichtigt bleiben. *P. Jordan (Rostock).*

Svartholm, N.: Über die äußere Differentialgleichung des Zweizentrenproblems. Ark. Mat. Astron. Fys. **25 B**, Nr 10, 1—6 (1936).

Es wird ein Fehler in Gl. (5) der Arbeit von Hylleraas [Z. Physik **93**, 582 (1935); dies. Zbl. **11**, 232] richtiggestellt, wodurch der Konvergenzbeweis für die Lösung der Differentialgleichung verbessert wird. Ferner wird die Lösung von Hylleraas mit der von Jaffé (dies. Zbl. **8**, 283) verglichen und gezeigt, daß beide auf die gleichen Eigenwerte führen. Für den $3d\sigma$ -Zustand werden einige numerische Ergebnisse mitgeteilt, die die Leistungsfähigkeit des neuen Hylleraasschen Verfahrens gegenüber den älteren Methoden von Teller und Hylleraas (dies. Zbl. **2**, 427) zeigen. *S. Flüge.*

Gordadse, G. S.: Über das Dreizentrenproblem. II. Z. Physik **99**, 287—299 (1936).

Es wird zunächst die Energie von H_3^+ im Normalzustand auf Grund der Quantenmechanik nach der Variationsmethode bestimmt und mit den Ergebnissen von anderen Berechnungen und der Erfahrung verglichen. Dasselbe Verfahren wird sodann auf den Normalzustand von H_3^+ angewandt. Es zeigt sich, daß sowohl bei der Annahme einer gleichzeitig dreieckigen als auch einer symmetrischen linearen Kernkonfiguration ein instabiles Molekül resultiert. (I. vgl. dies. Zbl. **12**, 183.) *R. de L. Kronig.*

Devonshire, A. F.: The rotation of molecules in fields of octahedral symmetry. Proc. Roy. Soc. London A **153**, 601—621 (1936).

Die Bewegung eines zweiatomigen Moleküls in einem äußeren Kraftfelde mit Oktaedersymmetrie, wie es etwa in einem Kristallgitter vorliegt, wird nach der Wellenmechanik untersucht. Nach einer gruppentheoretischen Einteilung der Energieniveaus wird ihre Aufspaltung durch das Kraftfeld als Funktion des die Feldstärke bestimmenden Parameters berechnet und graphisch dargestellt. Besondere Aufmerksamkeit wird den höheren Energieniveaus (schnell rotierendes Molekül) gewidmet. *R. de L. Kronig (Groningen).*

Trivedi, Hrishiksha: A theory of continuous absorption spectra of diatomic molecules. Proc. Acad. Sci., Allahabad **5**, 171—186 (1935).

Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen einem unteren Elektronenzustand, für dessen Schwingungsenergie der Kratzersche Ansatz eines anharmonischen Oszillators genommen wird, und einem oberen Elektronenzustand, dessen Schwingungsenergie exponentiell mit dem Kernabstand abnimmt. *F. Hund.*

Blochinzew, D., und Sch. Schechter: Die Lebensdauer von Teilchen im adsorbierten Zustande. Acta physicochim. (Moskva) **3**, 767—778 (1935).

Berechnung der Lebensdauer aus der Übergangswahrscheinlichkeit von einem adsorbierten in einen freien Zustand auf Grund eines einfachen Ansatzes für die potentielle Energie des Systems. *F. Hund (Leipzig).*

Peierls, R.: Quelques propriétés typiques des corps solides. Ann. Inst. H. Poincaré **5**, 177—222 (1935).

Zusammenfassende Übersicht über die quantenmechanische Behandlung typischer Eigenschaften von nichtmetallischen Kristallgittern: Schwingungen, spezifische Wärme, Dispersion des Lichtes, Wärmeleitung, Lichtabsorption. *F. Hund (Leipzig).*

Bozorth, R. M.: The present status of ferromagnetic theory. Bell Syst. Techn. J. **15**, 63—91 (1936).

Zusammenfassender Bericht.

R. Peierls (Cambridge).

Néel, L.: Théorie des anomalies de volume des substances ferromagnétiques. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 742—744 (1936).

Die durch die spontane Magnetisierung in einem Ferromagneten hervorgerufene Volumenänderung wird in eine Potenzreihe nach der Temperatur entwickelt und die ersten Koeffizienten empirisch bestimmt. Durch Vergleich mit einer sehr stark ver-

einfachten Theorie gewinnt man hieraus Aussagen über die Abhängigkeit der Austauschkräfte vom Atomabstand.

R. Peierls (Cambridge).

Feinberg, E. L.: Some relationships between atomic lattices. *Physik. Z. Sowjetunion* 8, 407—415 (1935).

Feinberg, E. L.: On the possibility of applying the Thomas-Fermi method to the problem of metallic cohesion. *Physik. Z. Sowjetunion* 8, 416—424 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 13, 90.

Hund, F., und B. Mrowka: Über die Zustände der Elektronen in einem Kristallgitter, insbesondere beim Diamant. *Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig* 87, 185—206 (1935).

Es wird angenommen, daß man die Bewegung der Elektronen durch ein Potentialfeld beschreiben kann, das die Symmetrie des Diamantgitters hat. Zunächst werden für die Eigenwerte dieses Potentialfeldes die Zusammenhangsverhältnisse auf Grund von Symmetriebetrachtungen untersucht. Die Form der Energieflächen wird für die Grenzfälle schwach und stark gebundener Elektronen angegeben. Schließlich wird die Termberechnung für ein Thomas-Fermi-Potential durchgeführt. *R. Peierls.*

Hund, F.: Über den Zusammenhang zwischen der Symmetrie eines Kristallgitters und den Zuständen seiner Elektronen. *Z. Physik* 99, 119—136 (1936).

Die Translationssymmetrie des Kristallgitters bestimmt das mögliche Verhalten der Eigenfunktionen gegen Translationen und damit die Anzahl der Zustände in einem „Band“. Von den übrigen Symmetrieeigenschaften des Gitters hängt es dann ab, ob diese Bänder alle voneinander energetisch getrennt sein können oder ob verschiedene von ihnen allgemein zusammenhängen müssen. Die Diskussion dieser Beziehungen wird für zweidimensionale Gitter allgemein, für dreidimensionale an zwei Beispielen (Diamant, hexagonale Kugelpackung) durchgeführt. *R. Peierls (Cambridge).*

Klassische Theorie der Elektrizität.

Benedictus, W.-H.: *Interprétation photonique du champ maxwellien.* *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 560—562 (1936).

Betrachtungen im Zusammenhang mit dem de Donderschen asymmetrischen Energietensor. *P. Jordan (Rostock).*

Wisniewski, Felix Joachim v.: Eine Bemerkung zur Theorie des elektromagnetischen Feldes. *Z. Physik* 98, 746—752 (1936).

„Es wird in dieser Arbeit untersucht, unter welchen Bedingungen eine elektromagnetische Deformation, die einen definierten und konstanten Raum τ_0 erfüllt, sich gemäß den Sätzen der analytischen Mechanik im Raume bewegen kann.“

P. Jordan (Rostock).

Braude, S. J.: The motion of electrons in electric and magnetic fields taking into consideration the action of space charge. *Physik. Z. Sowjetunion* 7, 565—571 (1935).

Tonks, Lewi: On the motion of electrons in crossed electric and magnetic fields with space charge. *Physik. Z. Sowjetunion* 8, 572—578 (1935).

Braude, S. J.: On the „cut-off“ in the plane magnetron with space-charge. (Note on Tonks' paper: „On the motion of the electrons in crossed electric and magnetic fields with space-charge.“) *Physik. Z. Sowjetunion* 8, 584—586 (1935).

Polemik zwischen S. Braude und L. Tonks, deren Gegenstand die physikalische Diskussion der in der erstgenannten Arbeit von S. Braude gefundenen Lösung der Bewegungsgleichungen für die Elektronen in einem ebenen Kondensator mit Raumladung und Magnetfeld ist. In jener Arbeit wurde von S. Braude behauptet, daß im betrachteten Fall das Magnetfeld nicht imstande ist, für die Elektronen den Weg zur Anode zu versperren (cut-off). L. Tonks vertritt die entgegengesetzte Meinung und zeigt, daß der Fehlschluß von S. Braude darauf beruht, daß der folgende Umstand

übersehen worden ist: Der Verlauf des Potentials ist durch die Braudesche Lösung nicht eindeutig bestimmt, und in der Umgebung der Anode ist (im Falle eines „cut-off“) auch ein linearer Verlauf möglich. In seiner Antwort gibt S. Braude zu, daß seine Annahme über den Potentialverlauf zwar mathematisch möglich ist, aber nicht physikalisch realisiert zu sein braucht, und daß seine Gleichungen die Möglichkeit einer Absperrung nicht ausschließen.

V. Fock (Leningrad).

Schelkunoff, S. A.: Some equivalence theorems of electromagnetism and their application to radiation problems. Bell Syst. Techn. J. 15, 92—112 (1936).

Verf. befaßt sich mit folgendem Problem: Zwei konzentrische Kreiszyylinder erstrecken sich einseitig gerade in unendlicher Länge. Zwischen ihnen befindet sich ein elektromagnetisches Wechselfeld. Gesucht ist die Energieausstrahlung dieses konzentrischen Leitersystems. Bei genügend hoher Frequenz des Wechselfeldes fließen die Wechselströme nur in einer unendlich dünnen inneren Schicht des äußeren Kreiszyinders und in einer ebensolchen Schicht an der Außenseite des inneren Kreiszyinders. Durch den äußeren Kreiszyylinder hindurch kann nirgends Energie ausgestrahlt werden. Die gesamte Energieausstrahlung muß also durch das offene Leiterende hindurch stattfinden. Die üblichen Integrationsmethoden zur Bewältigung dieses Problems scheinen dem Verf. zu kompliziert. Er geht aus von einem durch Love und Macdonald aufgestellten Äquivalenzprinzip: Man kann stets eine Verteilung elektrischer und magnetischer Ströme auf einer vorgegebenen Oberfläche finden derart, daß überall außerhalb dieser Oberfläche das gleiche Feld existiert, das folgen würde durch eine vorgegebene Quellenverteilung innerhalb der genannten Oberfläche. Ebenso ist das Feld innerhalb der Oberfläche äquivalent mit demjenigen vorgegebener Quellen außerhalb der Oberfläche. Verf. wendet dieses Theorem an auf einige Beugungsprobleme der von einer Dipolquelle ausgestrahlten Wellen an Spalten und Plättchen. Schließlich zeigt er, wie durch Anwendung des Theorems das eingangs genannte Problem mühelos bewältigt werden kann.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Foelsch, Kuno: Magnetfeld und Induktivität einer zylindrischen Spule. Arch. Elektrotechn. 30, 139—157 (1936).

Bei der Berechnung der magnetischen Feldstärkekomponenten einer zylindrischen Spule geht Verf. in üblicher Weise davon aus, daß die Spule vollständige Kreissymmetrie in bezug auf ihre Achse aufweist (also Ganghöhe der Windungen gleich 0). Als primäre Größe wird das magnetische Vektorpotential durch Integration berechnet. Hieraus folgen dann in einfacher Weise die genannten Feldstärkekomponenten, welche bekanntlich durch Ausdrücke mit vollständigen elliptischen Integralen der drei Gattungen gegeben werden. Die einlagige und die mehrlagige Zylinderspule werden ausdrücklich behandelt. Ein mathematischer Anhang enthält die notwendigen Formeln für die erwähnten elliptischen Integrale. Die Ausdrücke für die Feldstärkekomponenten werden auf eine möglichst einfache Form gebracht. Für die numerische Auswertung dieser Formeln leitet Verf. eine Reihe von einfachen Hilfsformeln ab. Numerische Beispiele beschließen diesen Teil der Arbeit. Der zweite Teil behandelt die Induktivität einer eisenlosen Zylinderspule, welche in einfacher Weise aus den berechneten Feldstärkeformeln folgt. Auch hier wird die Benutzung der Ausdrücke an numerischen Beispielen gezeigt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Ingram, W. H.: On an electro-magnetic inertial ellipsoid associated with the windings of electrical machinery. Philos. Mag., VII. s. 21, 299—308 (1936).

Die Analogie zwischen einem dynamischen System und dem durch eine elektrische Idealmaschine gegebenen elektromagnetischen System führt für die gesamte kinetische Energie (einschließlich der magnetischen Feldenergien) zu einem Ausdruck, der als Trägheitsellipsoid nach Cauchy und Poincot gedeutet werden kann. Transformation auf die Hauptachsen als Bezugssystem liefert Hauptinduktanzen, deren physikalische Bedeutung in mehreren Spezialfällen erörtert wird.

Ernst Weber (New York).